Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 607 ($WT = 2{,}59$) i 608 ($WT = 1{,}07$) z numeru 10/2010

Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Jerzy Cisło	Wrocław	40,66
Michał Kieza	Warszawa	38,62

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 623, 624

Redaguje Marcin E. KUCZMA

623. Czy można umieścić w polach szachownicy $n \times n$ liczby $1, \ldots, n^2$ tak, by w każdym wierszu suma liczb była całkowitą potęgą dwójki?

624. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dla jakich dodatnich liczb rzeczywistych b można znaleźć funkcję f, ciągłą na przedziale $\langle 0; b)$, różniczkowalną wewnątrz tego przedziału oraz spełniającą warunki: $f(0) = 1$, $f'(x) \geqslant f(x)^k$ dla $x \in \langle 0; b)$?

Zadanie 624 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2011

Przypominamy treść zadań:

615. Każdemu podzbiorowi B zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, który nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, przyporządkowujemy liczbę $p(B)$, będącą iloczynem liczb w zbiorze B (dla zbioru pustego przyjmujemy $p(\emptyset) = 1$). Obliczyć sumę kwadratów wszystkich uzyskanych liczb $p(B)$.

616. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich x, y, z:

$$\frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geqslant 6.$$

615. Oznaczmy szukaną wartość przez b_n. Weźmy pod uwagę wszystkie te podzbiory B zbioru $\{1, \ldots, n\}$, które nie zawierają żadnej pary liczb kolejnych i do których nie należy liczba n. Są to więc podzbiory zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$; suma kwadratów uzyskanych *dla nich* liczb $p(B)$ wynosi b_{n-1}.

Z kolei zbiory B (bez pary liczb kolejnych), do których liczba n należy, traktujemy jak podzbiory zbioru $\{1, \ldots, n-2\}$, z dołączonym elementem n; suma kwadratów uzyskanych *dla nich* liczb $p(B)$ wynosi $n^2 b_{n-2}$.

Dostajemy wzór rekurencyjny $b_n = b_{n-1} + n^2 b_{n-2}$, który z wartościami początkowymi $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ prowadzi przez łatwą indukcję do wyniku w jawnej postaci: $b_n = (n+1)!$.

616. Po pomnożeniu przez wspólny mianownik dostajemy do dowodu nierówność $L \geqslant P$, gdzie

$$\begin{aligned} L = {} & (y+z)^2(y^2+zx)(z^2+xy) + \\ & + (z+x)^2(z^2+xy)(x^2+yz) + \\ & + (x+y)^2(x^2+yz)(y^2+zx), \end{aligned}$$

$$P = 6(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy).$$

Teza wynika natychmiast z tożsamości

$$\begin{aligned} L - P = {} & yz(y^2-z^2)^2 + zx(z^2-x^2)^2 + xy(x^2-y^2)^2 + \\ & + (y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2, \end{aligned}$$

którą nietrudno sprawdzić, otwierając nawiasy i wykonując wskazane działania.

To już całe rozwiązanie – ta zmyślna tożsamość zaiste trywializuje problem, a jej sprawdzenie jest czynnością czysto mechaniczną (*Mathematica* robi to w ułamku sekundy; ręcznie sprawdzamy ją w parę minut). Ale jak na nią wpaść?!

Na przykład tak: dla $x = z$ różnica $L - P$ przyjmuje wartość $2yz(y^2-z^2)^2$; analogicznie dla $x = y$ i dla $y = z$. Zatem przyjmując

$$F(x,y,z) = yz(y^2-z^2)^2 + zx(z^2-x^2)^2 + xy(x^2-y^2)^2,$$

widzimy, że wielomian $(L - P) - F$ ma wartość zero, gdy dowolne dwie zmienne są równe. Jest więc podzielny przez wielomian

$$G(x,y,z) = (y-z)(z-x)(x-y).$$

Skoro zaś L, P, F są wielomianami symetrycznymi, natomiast G jest wielomianem antysymetrycznym (zmienia znak przy transpozycji zmiennych), wynika stąd, że iloraz $(L - P - F)/G$ też jest antysymetryczny – ma więc wartość zero, gdy dwie zmienne są równe, i w konsekwencji dzieli się znów przez G. To znaczy, że wielomian $L - P - F$ dzieli się przez G^2. Są to wielomiany jednorodne szóstego stopnia, ich iloraz musi być stałą.

Wniosek: $L - P - F = cG^2$. Wartość stałej c znajdujemy, podstawiając w miejsce x, y, z dowolne trzy różne liczby; wychodzi $c = 1$. Tak więc $L - P = F + G^2$. Jest to właśnie „ta zmyślna” tożsamość.