Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 605 ($WT = 2{,}35$) i 606 ($WT = 2{,}16$) z numeru 9/2010

Piotr Kumor	Olsztyn	44,70
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Michał Kieza	Warszawa	38,62
Jerzy Cisło	Wrocław	37,37

Przez dobrych parę lat niezagrożony lider w kolekcjonowaniu rund „44” – Piotr Kumor – z przyczyn osobistych na dwa lata przerwał zabawę, oddając pozycję lidera Januszowi Olszewskiemu. Jednak powrócił do nas – z czego się ogromnie cieszymy – i właśnie zakończył rundę jedenastą!

Zadania z matematyki nr 621, 622

Redaguje Marcin E. KUCZMA

621. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, stycznego do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Proste BC i YZ przecinają się w punkcie P. Dowieść, że proste IP i AX są prostopadłe.

622. Udowodnić nierówność
$$\frac{x+y}{1+x+y} + \frac{x+z}{1+x+z} \geqslant \frac{x}{1+x} + \frac{y+z}{1+y+z}$$
dla liczb $x, y, z \geqslant 0$.

Zadanie 622 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Warszawy.

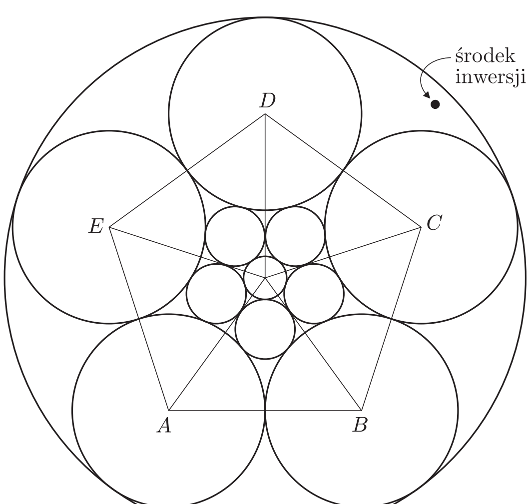
Rozwiązania zadań z numeru 1/2011

Przypominamy treść zadań:

613. Czy da się rozmieścić na płaszczyźnie skończenie wiele kół o rozłącznych wnętrzach tak, by każde z tych kół było styczne do pięciu innych?

614. Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne x, niecałkowite, dla których wartość wyrażenia $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest liczbą całkowitą.

613. To jest wykonalne. Bierzemy pięciokąt foremny $ABCDE$ i rysujemy pięć okręgów o środkach w jego wierzchołkach, o jednakowym promieniu $\frac{1}{2}|AB|$. Niech O będzie środkiem pięciokąta. W trójkącie AOB umieszczamy okrąg styczny do odcinków OA, OB oraz do narysowanych już okręgów o środkach A, B. Podobne okręgi umieszczamy w trójkątach BOC, COD, DOE, EOA. Wreszcie rysujemy dwa okręgi o środku O: mały, styczny zewnętrznie do pięciu okręgów, narysowanych przed chwilą – oraz duży, styczny do pięciu okręgów, narysowanych na początku i zawierający je wewnątrz.



W ten sposób mamy 12 okręgów, każdy styczny do pięciu innych. Styczność z największym okręgiem jest stycznością wewnętrzną. Każda inna jest stycznością zewnętrzną.

Bierzemy teraz dowolny punkt, leżący wewnątrz tego największego okręgu, ale na zewnątrz każdego z pozostałych, i stosujemy inwersję względem tego punktu. Obrazami naszych 12 okręgów jest znów 12 okręgów, każdy styczny do pięciu innych – i każda styczność jest zewnętrzna. Koła, których brzegami są powstałe okręgi, spełniają wymagany warunek.

614. Niech x będzie jedną z szukanych liczb. Zapisujemy ją w postaci nieskracalnego ułamka $x = m/n$, o mianowniku $n > 1$. Liczba $3x^3 + 10x^2 - 3x$ ma być całkowita, co oznacza, że $3m^3 + 10m^2n - 3mn^2$ dzieli się przez n^3. Stąd w szczególności wynika, że $3m^3$ dzieli się przez n, więc $n = 3$. Zatem $3m^3 + 30m^2 - 27m$ dzieli się przez 27.

Stąd wniosek, że liczba $3m^3 + 3m^2$ jest podzielna przez 27; innymi słowy, $m^2(m+1)$ dzieli się przez 9. Skoro zaś m jest liczbą względnie pierwszą z n (czyli z 3), liczba $m+1$ musi być podzielna przez 9.

Dla pewnego k całkowitego mamy więc $m = 9k - 1$, skąd $x = 3k - \frac{1}{3}$. Na odwrót, gdy x ma taką postać, wówczas liczba $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest całkowita – o czym można się przekonać, analizując „wstecz” wcześniejsze rozumowanie, albo po prostu sprawdzając rachunkiem, że wartość tego wyrażenia wynosi $(9k-1)(9k^2+8k-2)$.

Szukanymi liczbami wymiernymi są więc liczby postaci $3k - \frac{1}{3}$ (k całkowite).