Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2011

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr 619, 620

Redaguje Marcin E. KUCZMA

619. Szachownica o rozmiarach $n \times n$ została pokryta płytkami 2×2. Każda płytka pokrywa dokładnie cztery pola. Płytki zachodzą na siebie, ale nie wystają poza brzeg szachownicy. Liczba płytek przekracza $2(n^2 - n)/3$. Dowieść, że można usunąć jedną płytkę tak, by pozostałe płytki nadal pokrywały całą szachownicę.

620. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba całkowita n, że liczba $P(n)$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 620 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2010

Przypominamy treść zadań:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&0&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&2&&4&&2&& \\ &3&&7&&7&&3& \\ 4&&10&&12&&10&&4 \\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots \end{array}$$

611. Diagram przedstawia początkowe wiersze nieskończonej tabeli trójkątnej. Skrajnymi elementami kolejnych wierszy są kolejne liczby naturalne. Ponadto obowiązuje reguła: jeśli liczby b, c są sąsiednimi elementami dowolnego wiersza, nad nimi znajduje się liczba a, zaś pod nimi liczba d, to $a + d = b + c + 2$. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każda występuje w tej tabeli dokładnie k razy.

612. Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 ax$$

(dla pewnej stałej rzeczywistej a). Dowieść, że jeżeli f jest funkcją okresową, to a jest liczbą wymierną.

611. Przekręcamy diagram o 45° tak, by otrzymać tabelę – nieskończoną macierz $A = [a_{m,n}]_{m,n\geqslant 0}$; jest to lewa z dwóch tabelek poniżej:

$$A:\ \begin{array}{cccc} 0&1&2&3\ \ldots \\ 1&4&7&10\ \ldots \\ 2&7&12&17\ \ldots \\ 3&10&17&24\ \ldots \\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots \end{array} \qquad B:\ \begin{array}{cccc} 1&3&5&7\ \ldots \\ 3&9&15&21\ \ldots \\ 5&15&25&35\ \ldots \\ 7&21&35&49\ \ldots \\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots \end{array}$$

Zgodnie z treścią zadania, jej wyrazy są związane zależnościami: $a_{n,0} = a_{0,n} = n$,

$$a_{m,n} + a_{m+1,n+1} = a_{m+1,n} + a_{m,n+1} + 2.$$

W kolejnych wierszach widzimy ciągi arytmetyczne; odgadujemy wzór jawny $a_{m,n} = 2mn + m + n$. Sprawdzamy, że te liczby spełniają napisane przed chwilą równania (które wyznaczają zawartość całej tabeli jednoznacznie).

Tworzymy nową macierz nieskończoną $B = [b_{m,n}]_{m,n\geqslant 0}$ o wyrazach $b_{m,n} = 2a_{m,n} + 1$ (prawy diagram powyżej). Zachodzą równości $b_{n,0} = b_{0,n} = 2n + 1$,

$$b_{m,n} = 2(2mn + m + n) + 1 = (2m + 1)(2n + 1).$$

Tak więc B jest po prostu tabliczką mnożenia liczb nieparzystych. Każda liczba nieparzysta występuje w niej tyle razy, ile ma różnych dzielników dodatnich.

Niech teraz $k \geqslant 2$ będzie zadaną liczbą całkowitą. Bierzemy dowolną liczbę pierwszą $p > 2$; wówczas liczba p^{k-1} wystąpi w tabeli B dokładnie k razy. Wracając do tabeli A, widzimy, że dokładnie k razy pojawi się w niej liczba $(p^{k-1} - 1)/2$. Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych – mamy więc tezę zadania.

612. Niech T będzie okresem funkcji f. Z równości $f(T) = f(0)$, czyli

$$\cos^2 aT = 1 - \sin^2 T = \cos^2 T$$

(czyli jeszcze prościej: $\cos 2aT = \cos 2T$) wnosimy, że

$$2aT = \pm 2T + 2k\pi \qquad (k \text{ – liczba całkowita}).$$

Pochodna $f'(x) = \sin 2x - a \sin 2ax$ też jest funkcją T-okresową: $f'(T) = f'(0)$, czyli

$$\sin 2T = a \sin 2aT = a \sin(\pm 2T + 2k\pi) = \pm a \sin 2T.$$

Zatem albo $a = \pm 1$ (liczba wymierna), albo $\sin 2T = 0$, skąd $2T = l\pi$ $(l \neq 0)$,

$$a = \frac{\pm 2T + 2k\pi}{2T} = \pm 1 + \frac{2k}{l} \qquad \text{(liczba wymierna).}$$