Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2011

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr 617, 618

Redaguje Marcin E. KUCZMA

617. Znaleźć wszystkie funkcje F, określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, o wartościach rzeczywistych, spełniające równanie $F(3m+2n) = F(m)F(n)$ dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$.

618. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym środek odcinka AD jest jednakowo odległy od punktów P i C, a środek odcinka CD jest jednakowo odległy od punktów P i A. Punkt Q jest środkiem odcinka BP. Wykazać, że $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ$.

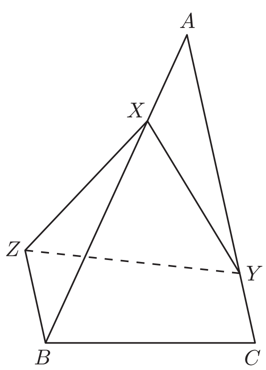
Zadanie 618 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2010

Przypominamy treść zadań:

609. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB jest najdłuższy. Na bokach AB i AC zaznaczono odpowiednio punkty X i Y tak, że $|AY| = |BX|$. Wykazać, że $2 \cdot |XY| > |BC|$.

610. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$,
$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$
Dowieść, że żaden wyraz tego ciągu nie ma dzielnika dodatniego postaci $8k+5$.



609. Na odcinku BX, po zewnętrznej stronie trójkąta ABC, budujemy trójkąt BXZ przystający do AYX (tak, że $|BZ| = |AX|$, $|XZ| = |YX|$). W tych trójkątach kąty przy wierzchołkach B i A są równe, wobec czego $BZ \parallel CA$. Zatem kąt CBZ jest rozwarty.

Skoro $|AB| > |AC|$, to $|BZ| = |AX| > |CY|$. Stąd i z rozwartości kąta CBZ wnosimy, patrząc na trapez $ZBCY$, że
$$|BC| < |YZ| \leqslant |YX| + |XZ| = 2 \cdot |XY|.$$

610. Określamy parę ciągów (a_n), (b_n) wzorami: $a_1 = b_1 = 1$,

(1) $$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Wówczas $a_2 = 3$ oraz
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_n + b_n) = a_{n+1} + 2a_n + (a_{n+1} - a_n) = \\ = 2a_{n+1} + a_n,$$
co pokazuje, że (a_n) jest ciągiem danym w zadaniu.
Ze wzorów (1) dostajemy równość
$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2);$$
a ponieważ $a_1^2 - 2b_1^2 = -1$, wynika stąd, że $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

Ustalmy n. Widać, że a_n jest liczbą nieparzystą. Niech $p = 2m+1$ będzie jej dowolnym dzielnikiem pierwszym. Dostajemy zależność
$$2b_n^2 \equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}.$$
Po podniesieniu do potęgi m (i skorzystaniu z małego twierdzenia Fermata: $b_n^{2m} \equiv 1$),

(2) $$2^m \equiv (-1)^{m(n+1)} \pmod{p}.$$

Za chwilę wykażemy, że jednocześnie

(3) $$2^m \equiv (-1)^{\lceil m/2 \rceil} \pmod{p}.$$

Równość (mod p) prawych stron (2) i (3) oznacza, że

(4) liczby $m(n+1)$ oraz $\lceil m/2 \rceil$ są jednakowej parzystości.

Dla n parzystego warunek (4) mówi, że $m = 4k$ lub $m = 4k+1$ dla pewnego k; zatem $p = 8k+1$ lub $p = 8k+3$. Każdy dzielnik pierwszy liczby a_n ma więc taką postać. Dowolny dzielnik dodatni (jako iloczyn pewnej liczby dzielników pierwszych) wtedy też jest tej postaci.

Dla n nieparzystego warunek (4) implikuje $m = 4k$ lub $m = 4k+3$, czyli $p = 8k+1$ lub $p = 8k+7$. I znów, dowolny iloczyn takich liczb też jest liczbą tej postaci. W obu przypadkach liczby postaci $8k+5$ nie mogą być dzielnikami liczby a_n.

Pozostaje udowodnić wzór (3). Przyjmijmy (dla ustalonego m) oznaczenia:
A = iloczyn wszystkich liczb parzystych z przedziału $\langle 1; m \rangle$,
B = iloczyn wszystkich liczb nieparzystych z przedziału $\langle 1; m \rangle$,
C = iloczyn wszystkich liczb parzystych z przedziału $\langle m+1; 2m \rangle$.

Iloczyn B liczy $\lceil m/2 \rceil$ czynników. Łączymy je z czynnikami iloczynu C w pary o sumie $2m+1$ (czyli p). Otrzymujemy związek $C \equiv B \cdot (-1)^{\lceil m/2 \rceil} \pmod{p}$. Stąd
$$2^m m! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m) = A \cdot C \equiv A \cdot B \cdot (-1)^{\lceil m/2 \rceil} = \\ = (-1)^{\lceil m/2 \rceil} m! \pmod{p}.$$
Wystarczy teraz podzielić przez czynnik $m!$ (względnie pierwszy z p), by uzyskać wzór (3) i zakończyć rozwiązanie.