Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2011

Zadania z matematyki nr 615, 616

Redaguje Marcin E. KUCZMA

615. Każdemu podzbiorowi B zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, który nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, przyporządkowujemy liczbę $p(B)$, będącą iloczynem liczb w zbiorze B (dla zbioru pustego przyjmujemy $p(\emptyset) = 1$). Obliczyć sumę kwadratów wszystkich uzyskanych liczb $p(B)$.

616. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich x, y, z:

$$\frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geqslant 6.$$

Zadanie 616 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2010

Przypominamy treść zadań:

607. Niech X będzie zbiorem n-elementowym ($n > 3$). Wyznaczyć największą liczbę m, dla której w zbiorze X istnieje m podzbiorów, z których żaden nie zawiera się w innym oraz żaden nie jest równoliczny z innym.

608. Znaleźć wszystkie funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające nierówność

$$f(x) - f(y) \geqslant f(xy)(y - x) \quad \text{dla } x, y > 0.$$

607. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną m podzbiorów zbioru X, spełniającą zadane warunki. Jeżeli do $\mathcal{F}$ należy zbiór pusty lub zbiór pełny (cały zbiór X), to już żaden inny zbiór nie może do $\mathcal{F}$ należeć. W tym przypadku $m = 1$.

Jeżeli do $\mathcal{F}$ należy pewien zbiór jednoelementowy J oraz pewien zbiór $(n-1)$-elementowy M, to muszą się one dopełniać (bo inaczej $J \subset M$) oraz żaden inny zbiór nie może do $\mathcal{F}$ należeć (bo albo zawiera J, albo jest zawarty w M). W tym przypadku $m = 2$.

Przyjmijmy dalej, że żadna z tych sytuacji nie ma miejsca. Wszystkie zbiory w $\mathcal{F}$ mają z założenia różne liczności. Wykluczone zostały liczności 0, n oraz albo 1, albo $n-1$. Pozostaje $n-2$ możliwych liczności. Zatem $m \leqslant n-2$.

Pokażemy teraz, że dla każdego $n \geqslant 4$ istnieje w zbiorze $X = \{1, \ldots, n\}$ rodzina $n-2$ podzbiorów $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_{n-2}\}$ o wymaganych własnościach. Najpierw przykłady dla $n = 4$, $n = 5$:

$$n = 4: \quad X = \{1,2,3,4\}; \qquad A_1 = \{4\}, \quad A_2 = \{1,2\};$$
$$n = 5: \quad X = \{1,2,3,4,5\}; \quad A_1 = \{5\}, \quad A_2 = \{3,4\}, \quad A_3 = \{1,2,3\}.$$

Dalej indukcja ze skokiem o 2. Niech $\{A_1, \ldots, A_{n-2}\}$ będzie „dobrą” rodziną podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$, ponumerowanych tak, że $|A_k| = k$ dla $k = 1, \ldots, n-2$. Bierzemy zbiór $X = \{1, \ldots, n+2\}$ i określamy:

$$B_k = A_{k-1} \cup \{n+1\} \quad \text{dla } k = 2, \ldots, n-1; \qquad B_1 = \{n+2\}, \qquad B_n = \{1, \ldots, n\}.$$

Widać, że $|B_k| = k$ dla $k = 1, \ldots, n$ i że żaden ze zbiorów B_k nie jest podzbiorem innego. Tak więc $\{B_1, \ldots, B_n\}$ jest rodziną podzbiorów X, o jaką chodzi.

Dostajemy odpowiedź: dla każdej liczby $n \geqslant 4$ maksymalna liczność rodziny $\mathcal{F}$ wynosi $n-2$.

608. Zamieniając miejscami x i y, a następnie mnożąc uzyskaną nierówność przez -1, otrzymujemy nierówność taką samą, jak wyjściowa, lecz przeciwnie skierowaną. Treścią zadania jest więc *równanie* funkcyjne

$$f(x) - f(y) = f(xy)(y - x) \quad \text{dla } x, y > 0.$$

Podstawiając $y = 1$ i oznaczając $a = f(1)$, dostajemy równanie $f(x) - a = f(x)(1 - x)$, czyli $a = xf(x)$. Zatem

$$f(x) = \frac{a}{x} \quad \text{dla pewnej stałej } a > 0.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że każda taka funkcja spełnia rozważane równanie.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 603 ($WT = 1{,}88$) i 604 ($WT = 1{,}81$) z numeru 6/2010

Franciszek S. Sikorski	45,98
Janusz Olszewski	11–45,63
Tomasz Warszawski	2–42,26
Bartłomiej Dyda	4–41,03
Piotr Kumor	10–40,19
Michał Kieza	3–36,46
Łukasz Garncarek	1–33,48
Jerzy Cisło	7–32,86
Zbigniew Skalik	1–32,27
Jan Czardybon	30,48
Andrzej Daniluk	2–29,74
Andrzej Dorobisz	29,11
Paweł Najman	4–28,96
Paweł Kubit	4–28,93
Jacek Jendrej	27,67
Joachim Jelisiejew	27,50
Joanna Bogdanowicz	26,02
Piotr Sobczak	25,18
Zbigniew Sewartowski	1–24,03
Tomasz Tkocz	2–23,77
Wojciech Świeboda	23,15
Paweł Łabędzki	23,04
Roksana Słowik	22,99
Adam Dzedzej	1–22,72
Krzysztof Dorobisz	3–22,64
Tomasz Choczewski	22,41
Piotr Żmijewski	1–21,51
Michał Miodek	21,18
Michał Koźlik	21,00
Krzysztof Kamiński	1–20,83

Legenda (przykładowo): stan konta 7–32,86 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 32,86 punktów.

Listę otwiera **Franciszek Salezy Sikorski** – nowa twarz w naszym Klubie. Za nim **Janusz Olszewski** – rekomendacja zbędna! to już „44” po raz dwunasty.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2008, 2009 lub 2010.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (10), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (12), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (8), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (7), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (4), M. Kieza, M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Tkocz, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

* * *

Kolejny rok ligowy za nami. Czołowe postaci zeszłorocznego omówienia nie zamierzają oddać pola następcom. **Janusz Olszewski** idzie jak burza, co rok pełna runda *44* – właśnie zakończył dwunastą. **Tomasz Wietecha** w dwuboju *mat-fiz* nie ma sobie równych.

Wśród zadań minionego sezonu było kilka bardzo ciekawych. Rzetelnie trudnych, a przy tym dających pole do wykazania się pomysłowością. Dokładniejsze omówienie – niżej. Zwróćmy uwagę, że są to prawie wyłącznie zadania o numerach parzystych, czyli proponowane przez Czytelników; a właściwie grupkę kilku osób, których nazwiska powtarzają się cyklicznie, z dużą regularnością. Autorom tych zadań dziękujemy za to, co już, i prosimy o jeszcze. Innych uczestników też zachęcamy do próbowania sił w twórczości autorskiej. Dzięki Wam liga żyje!

Zadanie **586** $[X \subset \{1,\ldots,99\},\ |X| = 9 \Rightarrow \exists\, A, B \subset X\colon A \neq B,\ (\sum A) = (\sum B)]$ (współczynnik trudności $WT = 2{,}76$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Rozmiary danych mieściły się jeszcze w zasięgu domowego komputera; można było sprawdzić wszystkie możliwości – tak to zrobił **Zbigniew Galias**.

Janusz Olszewski przedstawił dowód dość podobny do firmowego (który dał **Krzysztof Dorobisz**, autor zadania), jednak różniący się na tyle, że warto go tu pokazać.

Niech $1 \leqslant x_1 < \ldots < x_9 \leqslant 99$ i – nie wprost – przypuśćmy, że wszystkie podzbiory zbioru $X = \{x_1, \ldots, x_9\}$ mają różne sumy. Patrzymy na niepuste podzbiory A zbioru $Y = X \setminus \{x_9\}$ o liczności $|A| \leqslant 5$; jest ich 218. Odrzucamy te, w których $(\sum A) < x_4$; jest ich $\leqslant 7$ (tworzy się je jedynie z x_1, x_2, x_3). Niech S będzie zbiorem sum $(\sum A)$ wszystkich zbiorów, które pozostały; te sumy są różne, więc $|S| \geqslant 211 > 2x_9$. Zatem $\exists\, s, s', s'' \in S\colon s < s' < s''$, $s \equiv s' \equiv s'' \pmod{x_9}$. Ponieważ $(\max S) < x_4 + 4x_9$, $(\min S) \geqslant x_4$, więc $s'' - s < 4x_9$. Stąd $s' = s + x_9$ lub $s'' = s' + x_9$, co oznacza, że $\exists\, A, C \subset Y\colon (\sum A) = (\sum C) + x_9$. Biorąc $B\colon = C \cup \{x_9\}$, dostajemy $(\sum A) = (\sum B)$.

Autor nadmienił jeszcze, że podobna metoda działa dla 9-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, 126\}$.

Obaj wymienieni autorzy sprawdzili numerycznie, że teza nie zachodzi dla zbioru $\{1, \ldots, 161\}$, posiadającego podzbiór $\{77, 117, 137, 148, 154, 157, 159, 160, 161\}$, którego wszystkie podzbiory mają różne sumy. Zadali też pytanie, jak to jest ogólnie: dla $m \in \mathbb{N}$ – jaka jest najmniejsza liczba $w = w(m) \in \mathbb{N}$, dla której w zbiorze $\{1, \ldots, w\}$ istnieje m-elementowy podzbiór Z, którego wszystkie podzbiory mają różne sumy. (Teza naszego zadania: $w(9) > 99$.) Jest to *problem Erdősa–Mosera*; ma sporą literaturę. **Piotr Kumor** wskazał pracę: P. Borwein, M. J. Mossinghoff, *Newman polynomials...*, opublikowaną w *Mathematics of Computation* (72 (2003), 787–800), dostępną także pod `http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/` (w dziale MY PAPERS), opisującą algorytm, który pozwolił sprawdzić, że istotnie $w(9) = 161$ – oraz zawierającą dalsze odsyłacze bibliograficzne.

Zadanie **590** $[n \in \mathbb{N}$, parzysta; $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1+x+\ldots+x^n}{n+1}]$ ($WT = 2{,}66$; $LPR = 5$). Niech $P_n(x)$ oznacza wielomian po prawej stronie zadanej nierówności (dla $x \neq 1$: $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$). Teza brzmi zatem: $P_n(x) \geqslant P_1(x)^n$ dla $n = 2k$, $x \in \mathbb{R}$.

P. Kumor udowodnił lemat: $P_{n+1}(x) > P_1(x)P_n(x)$ dla $|x| < 1$, $n \in \mathbb{N}$ (badając pochodną różnicy między lewą i prawą stroną). Umożliwia on analizę danej w zadaniu nierówności dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, niekoniecznie parzystych. Wyniki dla $|x| < 1$ uzyskuje się z lematu indukcyjnie; z nich zaś, zastępując x przez $1/x$, wyniki dla $|x| > 1$:

$$\begin{aligned}
&P_n(x) < P_1(x)^n && \text{gdy } x < -1,\ n = 2k+1,\ k \geqslant 1;\\
&P_n(x) = P_1(x)^n && \text{gdy } x = 1 \text{ lub } n = 1\\
& && \text{lub } (x = -1,\ n = 2k+1);\\
&P_n(x) > P_1(x)^n && \text{w pozostałych przypadkach.}
\end{aligned}$$

Z. Sewartowski doszedł do tych samych ustaleń, badając pochodną funkcji $P_n(x)/P_1(x)^n$.

Tylko **J. Olszewski** i **P. Najman** zauważyli, że teza zadania jest banalnym wnioskiem z (równie banalnej) *nierówności Hadamarda*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (b-a) f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),$$

zachodzącej dla funkcji $f \geqslant 0$, wypukłej w przedziale $\langle a; b\rangle$ (prawa strona to pole trapezu pod styczną do wykresu w punkcie $\frac{a+b}{2}$); wystarczy przyjąć $f(t) = t^n$ w przedziale o końcach 1, x (to samo uzasadnienie miał na myśli autor zadania **T. Tkocz**).

Nieco inne, już nie tak proste rozumowanie z użyciem całek (dokładniej: średnich potęgowych) przedstawił **W. Bednarek**.

Zadanie **592** [Punkt P wewnątrz czworościanu $ABCD$; proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ w punktach $K, L, M, N \Rightarrow \frac{|AK|\cdot|BL|\cdot|CM|\cdot|DN|}{|AP|\cdot|BP|\cdot|CP|\cdot|DP|} \geqslant 256$] ($WT = 3{,}40$; $LPR = 3$). Uczestników ligi wyraźnie odstraszyła treść – tyle sfer! ... Tymczasem – zacytujmy fragment jednej z prac: *Po rozwiązaniu analogicznego zadania płaskiego, przerobienie go na 3D jest już łatwe*; *spora liczba sfer, przecinających się w jednym punkcie*, *jest wskazaniem do zastosowania inwersji.* Tak właśnie – przez inwersję przestrzenną – biegnie rozwiązanie firmowe (autor zadania: **Michał Kieza**); i tak też je rozwiązali **Adam Dzedzej** (z jego pracy był cytat) i **Janusz Olszewski**. Jeszcze **Adam Woryna** – wprawdzie nie używa słowa *inwersja*, ale konstruuje czworościan jednokładny do tego uzyskanego „inwersyjnie" w rozwiązaniu firmowym i dowodzi analogicznych proporcji.

Zadanie **593** [$a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_{n+3} = (a_{n+1}a_{n+2} + 5)/a_n$ $\Rightarrow$ wszystkie a_n całkowite] ($WT = 1{,}71$; $LPR = 21$). Zadanie nietrudne, dużo dobrych rozwiązań. **Tomasz Wietecha** rozwiązał zadanie nieco ogólniejsze, gdzie składnik 5 w formule rekurencyjnej jest zastąpiony dowolną liczbą naturalną p. Po wyprowadzeniu wzorów jawnych

$$a_{2k-1} = \frac{\beta^{k-1}(\alpha-2) - \alpha^{k-1}(\beta-2)}{\alpha-\beta},$$
$$a_{2k} = \frac{\beta^{k-1}(\alpha-2-p) - \alpha^{k-1}(\beta-2-p)}{\alpha-\beta},$$

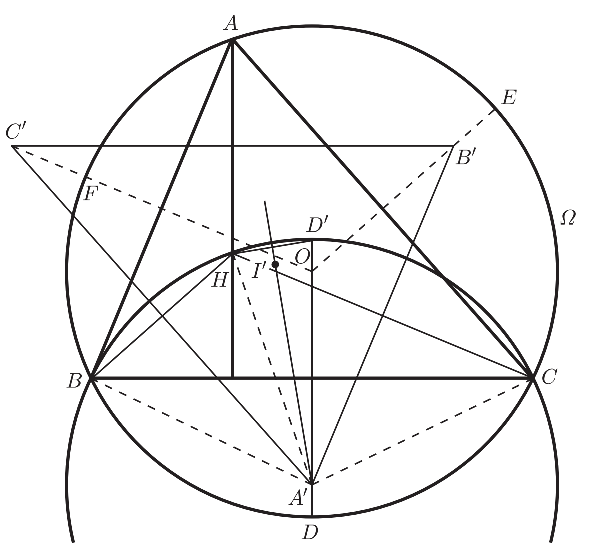
gdzie α, β to pierwiastki trójmianu $x^2 - qx + 1$ ($\alpha > \beta$), zaś $q = (3p+5)/2$, otrzymał zależności

$$a_{2k+3} = qa_{2k+1} - a_{2k-1},$$
$$a_{2k+4} = qa_{2k+2} - a_{2k} \quad (a_4 = p + 2).$$

Jeśli p jest liczbą nieparzystą, to q jest liczbą całkowitą i wszystkie a_n są całkowite.

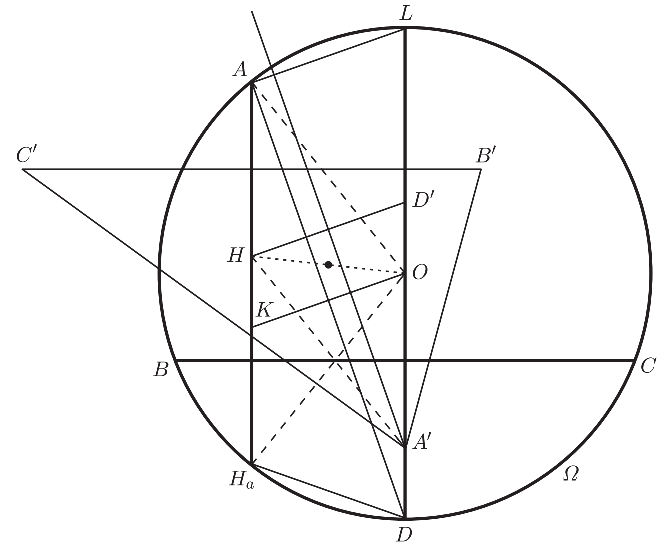
Zadanie **598** [$M = \{1, 2, \ldots, m^2\}$; ile podzbiorów bez pary liczb o różnicy podzielnej przez m? o różnicy równej m?] ($WT = 2{,}85$; $LPR = 7$). Poprawne rozwiązania nie różniły się istotnie od firmowego: **R. M. Ayoush**, **J. Cisło**, **A. Dorobisz**, **A. Dzedzej**, **J. Garnek**, **P. Sobczak** oraz **P. Najman**.

Zadanie **600** [$\triangle ABC$ wpisany w okrąg; D, E, F – środki łuków BC, CA, AB; D', E', F' – ich odbicia symetryczne względem prostych BC, CA, AB; H – ortocentrum $\Rightarrow$ D', E', F', H leżą na okręgu] ($WT = 2{,}83$; $LPR = 4$). Autor zadania, **Michał Kieza**, jest też autorem rozwiązania firmowego. Na uwagę zasługują dwa prostsze rozwiązania.



Jerzy Cisło: A', B', C' – punkty symetryczne do O (środka okręgu opisanego Ω) względem prostych BC, CA, AB. Punkt A' jest środkiem okręgu symetrycznego do Ω, przechodzącego przez punkty B, C, D' oraz H; leży on na symetralnych cięciw BH i CH. Analogicznie, te same symetralne przechodzą (odpowiednio) przez punkty C' i B'; zatem półproste $A'C'$ i $A'B'$ połowią kąty $HA'B$ i $HA'C$. Stąd łatwo wynika, że dwusieczna kąta $C'A'B'$ jest też dwusieczną kąta $D'A'H$, czyli symetralną odcinka $D'H$. Punkt I', w którym przecinają się dwusieczne trójkąta $A'B'C'$, jest więc środkiem okręgu, przechodzącego przez punkty D', E', F', H.

Marek Spychała: A', B', C', O, Ω – jak wyżej; $H_a = AH \cap \Omega$; DL – średnica Ω; $OLAK$ – równoległobok. Skoro $AD \perp AL$, zaś O jest środkiem DL, to AD jest symetralną odcinka OK. Odcinek HD' jest symetryczny względem prostej BC do cięciwy H_aD okręgu Ω; jest więc równoległy do cięciwy AL i czworokąt $OKHD'$ jest równoległobokiem. Odcinek HA' jest symetryczny względem BC do H_aO; jest więc równoległy do AO i czworokąt $OAHA'$ jest równoległobokiem. Symetria względem środka odcinka OH zamienia punkty: $O \leftrightarrow H$, $K \leftrightarrow D'$, $A \leftrightarrow A'$, i analogicznie $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Dwusieczna kąta A w trójkącie ABC, będąca symetralną OK, przechodzi na dwusieczną kąta A' w trójkącie $A'B'C'$, będącą symetralną $D'H$. Konkluzja jak w poprzednim rozwiązaniu.



Rozwiązanie rachunkowe (trygonometryczne) przedstawił **Tomasz Tkocz**. Rozwiązanie firmowe (choć zapisane w języku rachunku na wektorach) znalazł **Janusz Olszewski**, który ponadto zauważył proste uogólnienie: *Jeśli X jest dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC, a proste AX, BX, CX przecinają okrąg opisany w punktach D, E, F, to punkty symetryczne do D, E, F względem środków boków BC, CA, AB leżą na jednym okręgu z ortocentrum ABC.* (W zadaniu X jest środkiem okręgu wpisanego.) Rzeczywiście, aby uzyskać to uogólnienie, wystarczy w rozwiązaniu firmowym w jednym miejscu wykreślić słowo „prostopadłych" i wszędzie zastąpić I przez X.

Zadanie **602** [$a, b, c > 0$; $bc + ca + ab = 1$; $A = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{bc}}$; B, C określone analogicznie $\Rightarrow A + B + C \leqslant \frac{1}{a+b+c}$] ($WT = 2{,}18$; $LPR = 11$). Rozwiązania były w większości zgrabniejsze od firmowego. Wybierzmy to, które podał **R. M. Ayoush** (choć bardzo podobnie rozumowali **W. Bednarek**, **J. Cisło**, **J. Olszewski**). Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza:

$$\sqrt{1+\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{1+\frac{a}{c}} \geqslant 1 \cdot 1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \geqslant 1 + \frac{2a}{b+c};$$

stąd

$$A = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc}} =$$
$$= a\Big(1 + \sqrt{1+\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{1+\frac{a}{c}}\Big)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant a\Big(2 + \frac{2a}{b+c}\Big)^{-1} = \frac{ab+ac}{2(a+b+c)}.$$

Ta nierówność i jej dwa cykliczne odpowiedniki dają po zsumowaniu tezę zadania!