### Inne spojrzenie, czyli odpowiedź na pytanie, dlaczego

# Martin Gardner był wielkim matematykiem, choć matematykiem nie był

Martin Gardner urodził się 21 października 1914 r., a zmarł 22 maja 2010 r. Dwadzieścia pięć lat (1956–81) z jego długiego żywota zajęło redagowanie kącika matematycznego w *Scientific American*. I można by dopisać tu listę jego książek i artykułów. Ale to byłoby bez sensu. Bo o tym, co człowiek zrobił naprawdę, decyduje jedynie to, co w świecie po jego śmierci jest – dzięki niemu – inne, niż gdy się rodził.

Dość rozpowszechnione jest mniemanie, że matematyka to jest to, co robią matematycy. I wydaje się na pozór, że nie ma możliwości różnych interpretacji tego zdania. Pewien niepokój może, co prawda, wywoływać fakt, że tego rodzaju pogląd mają również uczniowie szkół niższych szczebli, co dla tych z nich, którzy spróbują uprawiać matematykę zawodowo, może się stać traumatycznym przeżyciem po wstąpieniu na studia. Aby temu zaradzić, powstało (w szczególności) dzieło *Co to jest matematyka?* Couranta i Robbinsa, w którym w sposób przystępny zrelacjonowano główne pojęcia i wyniki matematyki u progu XX wieku. Zaplecze dla tej książki stanowiły (niezbyt, co prawda, liczne) opracowania, od *Geometrii poglądowej* Hilberta i Cohn-Vossena po *Kalejdoskop matematyczny* Steinhausa. I one definiowały matematykę, choć społeczną opinię na ten temat deformowały (obok programu szkolnego) rozliczne dzieła popularyzatorów. I wydawało się, że tak być musi i tak już zawsze będzie: matematyka to produkty końcowe tego, czym zajmują się zawodowcy, plus techniczne przepisy umożliwiające wykonywanie obliczeń praktycznych.

Martin Gardner nie był matematykiem. Może właśnie dlatego mógł dostrzec, że matematyka – nawet określona wedle powyższych zasad – zmienia się. Coraz więcej bowiem matematyków zaczęło zajmować się budowaniem matematycznych modeli rzeczywistości. Działalność ta zaczęła dotyczyć nie tylko oczywistych opisów zjawisk fizycznych i ich technicznych realizacji, ale również procesów chemicznych, struktur biologicznych, medycyny, reguł genetycznych, prawidłowości handlu – i szerzej – gospodarki, zjawisk społecznych i psychicznych, wszelkiej logistyki, a nawet kultury.

Powszechność stosowania modeli matematycznych we wszystkich dziedzinach życia kazała Gardnerowi postawić pytanie, co on powinien zaczerpnąć z matematyki, by mógł prawidłowo i bez obaw posługiwać się tymi wszystkimi strukturami. Odpowiedź była bardzo prosta – i może dlatego dla wielu do dziś niedostrzegalna – nie będąc matematykiem, z matematyki trzeba zaczerpnąć nie jej wyniki i pojęcia, lecz **sposób myślenia**. I upowszechnieniem tego przekonania zajmował się całe życie.

Każdy bez trudu w Internecie, bibliotece czy księgarni znajdzie wiele tekstów Gardnera. Nie będę więc ich wyliczał, a pragnę tylko zwrócić uwagę na niektóre zadania czy pomysły, które dobitnie wskazują, jak inne jest jego spojrzenie na matematykę od prezentowanego np. w wymienionych wyżej książkach.

## Puchary

Miałem okazję wraz z Pawłem Strzeleckim być obiektem agresji w Kawiarence Naukowej *Przekroju* – rozwiązania poniższego zadania nie tylko nie zrozumiano, lecz nawet nie uwierzono, że jest możliwe.

*W jednym pucharze jest woda, w drugim wino. Zaczerpnięto z drugiego pucharu kieliszek wina i wlano do pierwszego. Potem zaczerpnięto ten sam kieliszek z pierwszego pucharu i wlano do drugiego. Czy na końcu więcej było wody w winie, czy wina w wodzie?*

Powodem agresji był fakt, że rozwiązanie nie zależy od tego, czy puchary miały tę samą objętość, ani od stosunku objętości pucharów i kieliszka, ani od tego, czy po pierwszej operacji wymieszano płyn w pierwszym pucharze itd. Wynik zawsze jest taki sam: *tyle samo jest wody w winie, co wina w wodzie*.

W obu naczyniach na początku i po obu operacjach poziom cieczy jest taki sam: ile więc jednej ubyło, tyle drugiej przybyło.

## Kolejka

*Codziennie o 16:00 mąż powraca z pracy kolejką podmiejską do rodzinnego Iksinowa. W tym też momencie jego żona zajeżdża na przystanek swoim samochodem, by odwieźć go do domu. Pewnego razu mężowi udało się wsiąść do godzinę wcześniejszej kolejki. Po przyjeździe do Iksinowa ruszył pieszo na spotkanie żony. Gdy spotkała go na drodze i powrócili do domu, okazało się, że są 10 minut wcześniej niż zwykle. Ile czasu mąż szedł pieszo?*

I tu nie jest ważne, jaka była odległość przystanku od domu, z jaką prędkością jechał samochód i z jaką prędkością szedł bohater opowieści. Jakiekolwiek by one nie były, wynik jest zawsze ten sam: *mąż szedł 55 minut*.

Jeśli żona wróciła do domu 10 minut wcześniej, to zawróciła o 5 minut wcześniej niż zazwyczaj – a więc o 15:55.

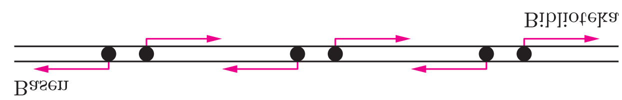
Obie metody, zastosowane przy rozwiązywaniu powyższych zadań, noszą w matematyce odpowiednio godne (może zresztą dla laików odstraszające) nazwy, ale nie ma najmniejszego powodu, by je przytaczać. U Gardnera nie uczymy się matematyki – uczymy się myśleć jak matematycy, a to zupełnie coś innego.

Najbardziej może istotnym elementem matematycznego myślenia według Gardnera (ale przecież wszyscy matematycy w istocie tak sądzą) jest obserwacja. Zobaczmy to na przykładach.

## Tramwaj

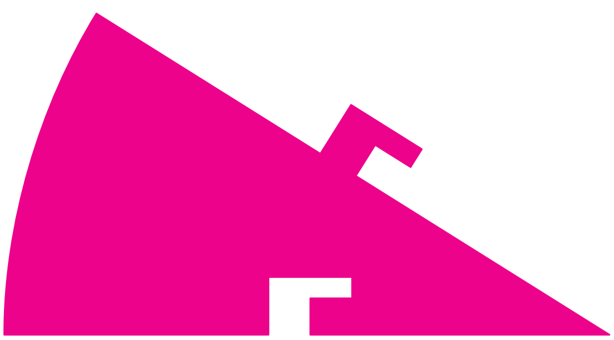
*Jaś po obiedzie biegnie na przystanek i wsiada w pierwszy nadjeżdżający tramwaj. Jadące w prawo wiozą go do biblioteki, a jadące w lewo – na basen. W każdą stronę tramwaje jeżdżą regularnie co dziesięć minut. Po półroczu okazało się, że Jaś cztery razy częściej bywał na basenie niż w bibliotece. Czy można wyjaśnić tę niesymetryczność, nie kwestionując tego, że obiady są podawane z dużą, losową nieregularnością, a Jaś tak samo lubi basen jak bibliotekę?*

Zadanie to, podane w bardziej frywolnej scenerii, było początkiem pierwszego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa na moich studiach (w szkole wtedy probabilistyki nie było). I zawstydziliśmy się, gdy okazało się, iż oczywiście *można*.




Wystarczy ten rysunek?

## Odetnij połowę



czyli przetnij przedstawioną figurę na dwie identyczne części.

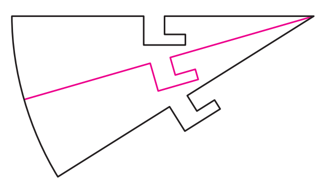


Figura ma dwie „dzikie” linie, które można nałożyć przez obrót względem ich wspólnego końca o pewien kąt. Obróćmy zatem „dziką” linię o połowę tego kąta. Otrzymana linia podzieli figurę na części jednakowe, bo dające się nałożyć przez obrót o tę samą połowę kąta.

## Turniej

*W turnieju tenisowym (a więc rozgrywanym systemem pucharowym) bierze udział 197 tenisistów. Jak zaplanować turniej, by wyłonić zwycięzcę, a przy tym – ze względu na wielką liczbę uczestników – żeby rozegrana została najmniejsza liczba meczów?*

Oczywiście, z punktu widzenia liczby meczów, *każde jego ułożenie jest jednakowo oszczędne*.

Istotnie, w każdym meczu odpada jeden zawodnik, więc meczów w każdym przypadku będzie 196.

To ostatnie zadanie przypomina znane zadanie o czekoladzie (np. $6 \times 4$): *jak najlepiej ją łamać, by każdy kafelek był osobno.*

Aby otrzymać dobry wynik (w naszym przypadku 23 łamania), trzeba dodać warunek, by nie łamać za jednym zamachem kilku kawałków położonych jedne na drugich. Wolne od takich ograniczeń jest kolejne zadanie.

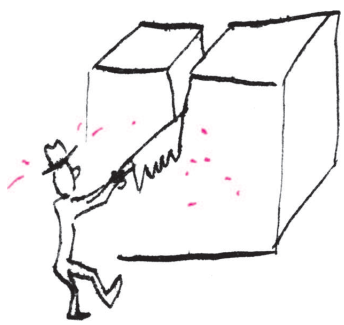
## Cięcie piłą

*Jak wiadomo, sześcian dzieli się na 27 sześcianów o trzy razy krótszej krawędzi. Jaka jest najmniejsza liczba cięć, które pozwolą to zrealizować? Uzyskane w jakimś cięciu kawałki można ułożyć jedne na drugich i ciąć za jednym zamachem.*

Pomalujmy sześcian jaskrawą farbą przed pocięciem. Po pocięciu jeden z sześcianików będzie miał wszystkie ściany niepomalowane. A ścian tych jest 6. Ponieważ żadnych dwóch z nich nie można otrzymać w jednym cięciu, więc mniej ich być nie może (a czy może być 6?).

Wszystko to pięknie, ale nie sposób nie zadać pytania

**czy taka gardnerowska matematyka to ta sama matematyka, którą uprawiają zawodowcy?**

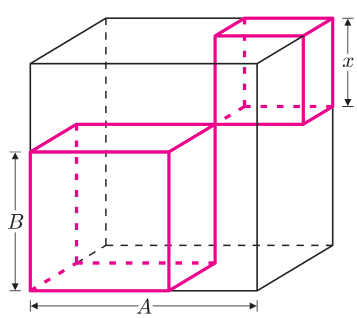


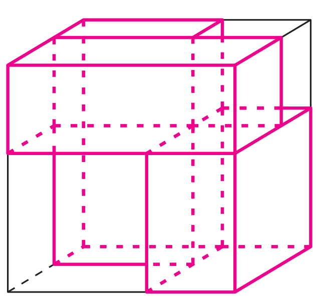
Innymi słowy, skąd wziąć pewność, że nie są to tylko jakieś „anegdotki” (by użyć sformułowania wybitnego autorytetu edukacji)? Jak udowodnić, że gardnerowskie myślenie to rzeczywiście myślenie matematyczne?

Przede wszystkim jest mocny dowód socjologiczny. Większość zarówno wybitnych, jak i szeregowych matematyków uważa, że to, co proponuje Gardner, wyraża ich sposób myślenia, a na dodatek jest – jako przygoda intelektualna – atrakcyjne również dla nich samych. Zostało to wyrażone w wielu publikacjach, w formie licznych nagród, w wydaniu kilku ksiąg ku czci Gardnera.

Ale o wiele lepszym dowodem jest jednak przyjrzenie się procesowi odkryć dokonywanych na pierwszej linii matematycznych zmagań. Tam, gdzie jesteśmy w stanie wyłuskać go z pancerza formalizmów, okazuje się on identyczny z przytoczonymi wyżej zadaniami.

## Równanie trzeciego stopnia



Tartaglia przyjrzał się temu, co będzie, gdy z przeciwległych rogów sześcianu o krawędzi $A$ wytniemy sześciany o krawędziach $B$ i $x$ stykające się jednym wierzchołkiem. I spostrzegł, że to, co zostanie, to trzy identyczne cegły o krawędziach $A$, $B$, $x$. Daje to zależność

$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx, \quad \text{czyli} \quad x^3 + 3ABx = A^3 - B^3.$$

Gdy więc mamy rozwiązać równanie $x^3 + px = q$, możemy wyobrazić sobie taki sześcian, w którym $3AB = p$ (czyli $A^3B^3 = \frac{p^3}{27}$) i $A^3 - B^3 = q$. Otrzymaliśmy zwykłe, szkolne równanie kwadratowe:

$$(q + B^3)B^3 = \frac{p^3}{27}, \quad \text{czyli} \quad (B^3)^2 + q(B^3) - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Zatem

$$B^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2} \quad \text{i} \quad A^3 = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}.$$

Ponieważ z rysunku mamy $A = B + x$, więc

$$x = A - B = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Na przykład dla $x^3 + 6x + 7 = 0$ mamy

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{4} + 8} - \frac{7}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{4} + 8} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8} = 1 - 2 = -1.$$

Oczywiście, dalej mogą (muszą!) pojawić się kłopoty – już równanie $x^3 - 7x + 6 = 0$ zaskoczy nas niespodzianką – wzory się „zatną”, choć są oczywiste pierwiastki $-3$, 1, 2. Bo samo sprawne myślenie do tworzenia matematyki nie wystarczy – aby wzory Tartaglii udoskonalić tak, by działały zawsze, potrzebny jest sprawny matematyczny warsztat, ale początek został zrobiony przez cięcie sześcianu.