Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 601 ($WT = 1{,}57$) i 602 ($WT = 2{,}18$) z numeru 5/2010

Franciszek S. Sikorski	Warszawa	43,92
Janusz Olszewski	Warszawa	41,94
Piotr Kumor	Olsztyn	40,19
Bartłomiej Dyda	Wrocław	37,34
Michał Kieza	Warszawa	36,46

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr 613, 614

Redaguje Marcin E. KUCZMA

613. Czy da się rozmieścić na płaszczyźnie skończenie wiele kół o rozłącznych wnętrzach tak, by każde z tych kół było styczne do pięciu innych?

614. Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne x, niecałkowite, dla których wartość wyrażenia $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 614 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2010

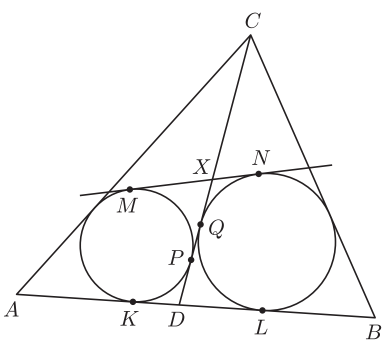
Przypominamy treść zadań:

605. Rozwiązać równanie $x^3 + x^2 = 16 + 2^y$ w liczbach całkowitych x, y.

606. Dany jest trójkąt ABC. Rozważamy punkt D, zmieniający swoje położenie na boku AB. Prosta styczna do okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD, rozłączna z odcinkiem AB, przecina odcinek CD w punkcie X. Udowodnić, że wszystkie uzyskane w ten sposób punkty X leżą na pewnym okręgu.

605. Łatwo sprawdzić, że wartość wyrażenia $x^3 + x^2 - 16$ może dać przy dzieleniu przez 7 wszystkie reszty z wyjątkiem 2 oraz 4. Potęgi dwójki dają jedynie reszty 1, 2, 4. Rozważane równanie może więc być spełnione tylko wtedy, gdy $2^y \equiv 1 \pmod 7$; to zaś ma miejsce jedynie dla wykładników y podzielnych przez 3.

Jeśli więc równanie $x^3 + x^2 - 16 = 2^y$ jest spełnione, to 2^y jest sześcianem liczby całkowitej. Dla liczb całkowitych $x > 4$ wartość $x^3 + x^2 - 16$ leży pomiędzy x^3 a $(x+1)^3$, więc nie jest sześcianem. Dla $x < 3$ wartość $x^3 + x^2 - 16$ jest ujemna. Dla $x = 3$ dostajemy równanie sprzeczne $20 = 2^y$. Pozostaje wartość $x = 4$, która wraz z $y = 6$ daje jedyne rozwiązanie równania.



606. Przyjmijmy, że okręgi wpisane w trójkąty ACD i BCD są styczne do boku AB odpowiednio w punktach K i L; do prostej przechodzącej przez X – odpowiednio w punktach M i N; zaś do odcinka CD – odpowiednio w punktach P i Q.

Punkty styczności z okręgiem wpisanym w trójkąt wyznaczają na jego bokach odcinki o długościach wyrażających się znanymi wzorami:

$$|DK| = \frac{|AD| + |CD| - |AC|}{2}, \qquad |DL| = \frac{|BD| + |CD| - |BC|}{2}.$$

Po dodaniu stronami:

$$|KL| = |CD| - \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}.$$

Odnotujmy także zależności

$$|DX| = \frac{|DP| + |PX|}{2} + \frac{|DQ| + |QX|}{2} = \frac{|DK| + |MX|}{2} + \frac{|DL| + |NX|}{2} = \frac{|KL| + |MN|}{2}.$$

Odcinki KL i MN są symetryczne względem wspólnej osi symetrii obu okręgów. Możemy zatem przepisać ostatnią równość jako $|DX| = |KL|$.

Z uzyskanych związków wnosimy, że

$$|CX| = |CD| - |DX| = |CD| - |KL| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}.$$

To znaczy, że punkt X leży na okręgu o środku C i promieniu zależnym jedynie od trójkąta ABC, a nie od położenia punktu D na boku AB.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 500 ($WT = 1{,}21$) i 501 ($WT = 3{,}73$) z numeru 6/2010

Mateusz Łącki	Kraków	44,50
Jacek Piotrowski	Rzeszów	37,13
Tomasz Rudny	Warszawa	32,65
Jerzy Witkowski	Radlin	31,75
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,57
Dariusz Wilk	Rzeszów	26,57
Andrzej Idzik	Bolesławiec	26,47
Tomasz Wietecha	Tarnów	24,39

Witamy kolejnego członka naszego Klubu – p. Łąckiego.