Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Jednym z celów statutowych Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej jest wspieranie i rozwijanie zainteresowań młodzieży szkolnej w zakresie matematyki. Zrodziła się stąd inicjatywa Zarządu SEM uruchomienia Internetowego Koła Matematycznego dla gimnazjalistów. Co miesiąc – od połowy sierpnia – publikowane są na stronie internetowej

www.sem.edu.pl/omg/kolko.php

zestawy siedmiu zadań przypominających swoim charakterem zadania konkursowe Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Każdy zainteresowany uczeń (również nauczyciel!) może zapoznać się z treściami zamieszczonych zadań i spróbować je rozwiązać. Po dwóch tygodniach od ukazania się zestawu na stronie zamieszczane są wskazówki do zadań, a po kolejnych dwóch pełne rozwiązania. Ponadto przed publikacją rozwiązań w kilkunastu miastach w całej Polsce odbywają się spotkania, gdzie są one omawiane. Lista miejsc wraz z terminami spotkań znajduje się na stronie koła.

W chwili pojawienia się tego numeru *Delty* zamieszczone są trzy zestawy zadań oraz wskazówki i rozwiązania do pierwszych dwóch. Zachęcając wszystkich zainteresowanych do zapoznania się z zadaniami Internetowego Koła Matematycznego, przedstawiamy dwa zadania wybrane z tych zestawów.

1. *W pudełku znajduje się 11 kul białych i 11 kul niebieskich. Jaś i Małgosia grają w następującą grę, którą rozpoczyna Małgosia. Wyjmuje ona z tego pudełka wybrane przez siebie dwie kule. Jeżeli wybierze kule jednakowego koloru, to do pudełka dokłada jedną kulę białą; jeżeli wybierze kule różnych kolorów, to dokłada kulę niebieską. Następnie swój ruch, według tych samych zasad, wykonuje Jaś i znów Małgosia, znów Jaś itd., aż w końcu w pudełku zostanie tylko jedna kula. Jeżeli ta kula będzie biała, wygrywa Małgosia. W przeciwnym razie wygrywa Jaś. Czy Małgosia może tak prowadzić tę grę, aby wygrać? Odpowiedź uzasadnij.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że po każdym ruchu liczba kul w pudełku zmniejsza się o 1 (gracz wybiera dwie kule, a dokłada jedną). Ponadto nie zmienia się parzystość liczby kul niebieskich. Rzeczywiście – jeżeli gracz wybierze dwie kule białe, to dokłada zamiast nich kulę białą, czyli liczba kul niebieskich w pudełku nie zmienia się, a jeżeli gracz wybierze dwie kule niebieskie, to dokłada zamiast nich kulę białą, czyli liczba kul niebieskich w pudełku zmniejsza się o 2. I wreszcie, gdy gracz wybierze dwie kule różnych kolorów, to dokłada zamiast nich kulę niebieską, czyli liczba kul niebieskich w pudełku nie zmienia się.

Na początku gry w pudełku była nieparzysta (11) liczba kul niebieskich, zatem jeśli pozostanie w nim tylko jedna kula, musi ona być niebieska. Jak widać, zawsze wygrywa Jaś.

Uwaga. Można to uzasadnić również inaczej. Oznaczmy każdą kulę białą liczbą $+1$, a każdą kulę niebieską liczbą -1. Zauważmy, że po wykonaniu każdego ruchu nie zmienia się iloczyn liczb przypisanych kulom znajdującym się w pudełku. Jeżeli bowiem wyjmujemy dwie kule białe lub dwie kule niebieskie, to iloczyn liczb na tych kulach będzie równy $+1$, czyli liczbie przypisanej kuli białej. Zatem po wyjęciu dwóch kul jednakowego koloru i dodaniu kuli białej, iloczyn liczb przypisanych kulom znajdującym się w pudełku nie zmieni się. Analogicznie, jeżeli wybierzemy z pudełka dwie kule różnych kolorów i dołożymy kulę niebieską, to iloczyn liczb na kulach znajdujących się w pudełku również nie zmieni się. Oznacza to, że iloczyn liczb na kulach na początku gry jest równy liczbie na ostatniej kuli. Iloczyn jedenastu liczb $+1$ i jedenastu liczb -1 jest równy -1, czyli ostatnia kula w pudełku ma znak -1. Jest to zatem kula niebieska.

2. *Czy istnieją różne liczby pierwsze p, q i r, dla których liczba*

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$$

jest liczbą całkowitą? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Załóżmy, że liczba $\dfrac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$ jest całkowita. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p<q<r$. Liczba r jest pierwsza, więc musi być dzielnikiem jednej z liczb $p+q$, $q+r$, $r+p$. Gdyby liczba $q+r$ była podzielna przez r, to przez r podzielna byłaby również liczba q, co nie jest możliwe. Podobnie, gdyby liczba $r+p$ była podzielna przez r, to przez r podzielna byłaby również liczba p, co też nie jest możliwe. Wobec tego $r \mid p+q$ i w konsekwencji mamy

$$1 \leqslant \frac{p+q}{r} < \frac{2r}{r} = 2.$$

Zatem liczba $\dfrac{p+q}{r}$ – jako liczba całkowita – musi być równa 1. Stąd uzyskujemy $p+q=r$, co z kolei implikuje równość $p=2$ (w przeciwnym razie liczba $r=p+q$, jako suma dwóch liczb nieparzystych, byłaby liczbą parzystą większą od 2, czyli złożoną). Wobec tego $p=2$ oraz $r=q+2$.

Dany w treści zadania ułamek redukuje się zatem do postaci

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr} = \frac{(2q+2)(q+4)}{2q} = q+5+\frac{4}{q}.$$

Liczba ta jest całkowita tylko wtedy, gdy $q=2$, ale wtedy $q=p$. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że liczby p i q są różne. Tak więc nie istnieją liczby p, q, r spełniające warunki zadania.

Tomasz SZYMCZYK