

Informatyczny kącik olimpijski (124):

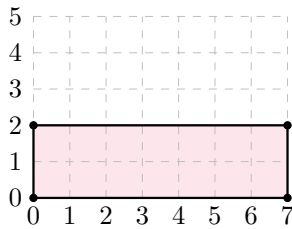
Wyspa i liczydło

Tym razem omówimy dwa zadania: *Wyspę* z IX OIG oraz *Liczydło* z XII OIG.

Wyspa: Dany jest prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, którego lewy-dolny róg ma współrzędne $(0,0)$, zaś prawy-górny róg ma współrzędne (N,M) . Dla podanego $P \in \mathbb{N}$ ($P \leq \frac{NM}{2}$) chcemy znaleźć taki czworokąt wypukły o polu P , którego wierzchołki mają współrzędne całkowite oraz należą do prostokąta.

Przypadek: $N \mid P$

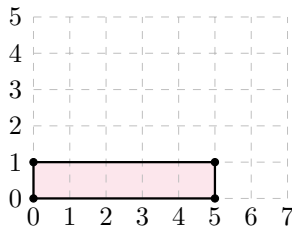
Rozważmy najpierw przypadek, kiedy $N \mid P$. Wtedy możemy zbudować prostokąt, którego wierzchołkami są: $(0,0)$, $(N,0)$, $(N, \frac{P}{N})$ i $(0, \frac{P}{N})$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 14$.



Przypadek: $N \nmid P$

Ten przypadek przeanalizujemy w trzech krokach:

1. Jeśli $P < N$, wtedy możemy zbudować prostokąt, którego wierzchołkami są: $(0,0)$, $(P,0)$, $(P,1)$ i $(0,1)$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 5$.



2. Jeśli $N < P < 2N$, wtedy możemy zbudować trapez, którego wierzchołkami są: $(0,0)$, $(N,0)$, $(P-N,2)$ i $(0,2)$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 10$.

Zauważmy najpierw, że tylko dla $L = 0$ i $P = 0$ odpowiedzią jest 0. Podobnie, tylko dla $L = P$, gdzie $L \neq 0$, odpowiedzią jest 1 – wystarczy do obu liczb dodać $-L$.

W pozostałych przypadkach odpowiedź będzie większa od 1. Zauważmy, że operacja typu 2) nie pozwala wyzerować niezerowej liczby, więc ostatnia operacja będzie typu 1) i zostanie zastosowana do dwóch równych liczb. Jak zatem wyrównać dwie liczby w minimalnej liczbie ruchów?

Rozważmy przypadek, kiedy jedna z liczb jest wielokrotnością drugiej (bez straty ogólności założmy, że L jest wielokrotnością P):

Liczydło: Dane są dwie liczby całkowite L i P . W każdym kroku możemy wykonać jedną z dwóch operacji: 1) dodać dowolnie wybraną liczbę całkowitą do L oraz do P (jednocześnie); 2) przemnożyć L lub P przez dowolnie wybraną niezerową liczbę całkowitą. Ile minimalnie operacji należy wykonać, aby obie liczby stały się równe zero?

- jeśli $L \neq 0$, wtedy P mnożymy przez $\frac{L}{P}$. Całkowita liczba operacji wynosi 2,
- jeśli $L = 0$, wtedy do obu liczb dodajemy P i tę o mniejszej wartości bezwzględnej mnożymy przez 2. Całkowita liczba operacji wynosi 3.

Pozostał nam ostatni przypadek, kiedy L nie jest wielokrotnością P oraz P nie jest wielokrotnością L . Wtedy mnożymy L przez P oraz P przez L i otrzymujemy dwie równe liczby. Wówczas odpowiedzią jest 3.

Prosty dowód, że w każdym z powyższych przypadków korzystamy z minimalnej liczby operacji, pozostawiamy Czytelnikowi.

Bartosz ŁUKASIEWICZ