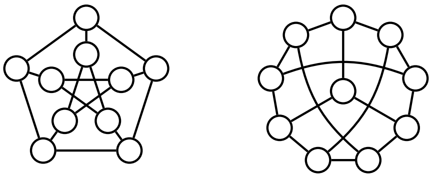
Problem izomorfizmu grafów

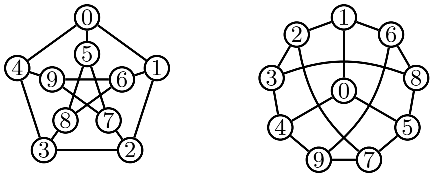
*Łukasz KOWALIK**

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Spójrzmy na dwa grafy na poniższym rysunku. Wyglądają zupełnie inaczej, prawda?



A jednak to tylko złudzenie. Tak naprawdę to jest ten sam graf, ale inaczej narysowany. Istotnie, poniżej ponumerowaliśmy wierzchołki obu grafów od 0 do 9 i łatwo można sprawdzić, że w obu przypadkach wierzchołek o danym numerze ma takie same numery sąsiadów.



Izomorfizm grafów $G = (V_G, E_G)$ i $H = (V_H, E_H)$ to dowolna bijekcja $f : V_G \to V_H$, taka że dowolne dwa wierzchołki $u, v \in V_G$ sąsiadują w G wtedy i tylko wtedy, gdy $f(u)$ i $f(v)$ sąsiadują w H. Gdy izomorfizm z G do H istnieje, mówimy, że grafy G i H są izomorficzne. Przykład izomorfizmu grafów widzimy na rysunku powyżej.

Informatyk od razu zapyta o algorytm rozstrzygający, czy dane dwa grafy są izomorficzne. Oznaczmy $n = |V_G| = |V_H|$ (gdy ostatnia równość nie zachodzi, problem jest banalny). Algorytm wynikający wprost z definicji sprawdza wszystkie $n!$ bijekcji i działa w czasie $O(n! \cdot n^2)$. Ale czy istnieje algorytm wielomianowy? To niewinne pytanie jest jednym z największych problemów otwartych współczesnej informatyki.

Oczytany Czytelnik zapewne zna wiele innych problemów grafowych, dla których algorytm wielomianowy nie jest znany: problem kliki, problem cyklu Hamiltona, problem kolorowania. Są to problemy NP-zupełne, a rozwiązanie jednego z nich w czasie wielomianowym od razu implikuje takie rozwiązanie dla pozostałych (oraz tysięcy innych nazwanych problemów z klasy NP). Co ciekawe, nie wiemy, czy problem izomorfizmu grafów jest NP-zupełny! Mamy nawet istotne powody, aby podejrzewać, że tak nie jest (przeczyłoby to kilku znanym hipotezom). Gdy autor tego artykułu był studentem, znany był jeszcze jeden problem o podobnym statusie: testowanie pierwszości liczb, w 2002 roku został on jednak rozwiązany w czasie wielomianowym. Czy ten sam los czeka izomorfizm grafów? Aktualny rekord świata, który ustanowił Laszlo Babai dwa lata temu, to algorytm działający w czasie $n^{O((\log n)^c)}$, dla pewnej stałej c.

Zanim porwiemy się na trudny problem, warto zrozumieć jego szczególne, być może prostsze, przypadki. Jedną z najprostszych klas grafów są drzewa (grafy spójne bez cykli). Jak sprawdzić, czy dwa drzewa, T_1 i T_2, są izomorficzne? Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem T_1. Rozpatrzmy wszystkie n możliwości ustalenia $w = f(v)$. Możemy ukorzenić T_1 w v, tzn. uznać, że v jest korzeniem, a dla dowolnego innego wierzchołka u sąsiad u na (jedynej) ścieżce do v jest ojcem u. Podobnie ukorzeniamy T_2 w w. Naszym celem będzie przypisanie każdemu ukorzenionemu drzewu identyfikatora (wyrażenia nawiasowego) tak, aby drzewa były izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same identyfikatory. Wówczas wystarczy porównać identyfikatory T_1 i T_2. Drzewo składające się z pojedynczego wierzchołka dostaje identyfikator `()`. Identyfikator drzewa powstaje przez a) posortowanie identyfikatorów poddrzew korzenia, b) sklejanie ich w uzyskanej w kolejności w jedno słowo, c) dodanie symbolu `(` na początku i symbolu `)` na końcu. Na przykład, drzewo  zakodujemy jako `((()())())`, zakładając, że w naszym porządku sortowania nawias otwierający poprzedza nawias zamykający. Czytelnik Pracowity na pewno z łatwością wykaże przez indukcję, że istotnie tylko izomorficzne drzewa dają ten sam identyfikator dla pewnej wartości $w = f(v)$. Tak uzyskany algorytm jest wielomianowy, a kosztem dodatkowego wysiłku można tę złożoność zmniejszyć nawet do liniowej.

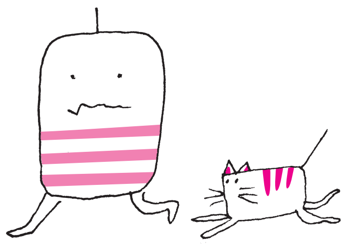
Istnieją znacznie bardziej złożone klasy grafów niż drzewa, dla których problem izomorfizmu grafów ma wielomianowe rozwiązanie. Jedną z nich są grafy planarne, tzn. takie, które można narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi. Algorytm opiera się na twierdzeniu Whitneya, mówiącemu, że jeśli graf planarny jest 3-spójny (nie da się usunąć dwóch wierzchołków tak, aby uzyskać graf, który nie jest spójny), to można go narysować na sferze w jeden tylko sposób. Dokładniej, każdy rysunek można przekształcić w inny za pomocą ciągłego odwzorowania sfery w sferę. Takie odwzorowania nie zmieniają np. cyklicznej kolejności sąsiadów wierzchołka, a więc gdy mamy już na sferze narysowane dwa grafy i zgadniemy, jak izomorfizm odwzorowuje wierzchołki dowolnej wybranej krawędzi uv, to pozostałe wartości izomorfizmu są wyznaczone jednoznacznie (najpierw wyznaczymy obrazy sąsiadów v, potem sąsiadów sąsiadów v, itd.). Graf ma rysunek na sferze wtedy i tylko wtedy, gdy jest planarny, a przejście od 3-spójnych grafów planarnych do dowolnych planarnych nie jest trudne. Inny słynny wynik to grafy o stopniu ograniczonym przez stałą d: w 1983 roku Babai i Luks podali algorytm działający w czasie $n^{O(d)}$, korzystając z zaawansowanych narzędzi teorii grup.

Na szczęście w praktyce jest dużo lepiej niż w teorii. Rozważmy następujący algorytm. Na początku wszystkie wierzchołki G i H otrzymują ten sam kolor. Niech $c(v)$ oznacza kolor v. Następnie dla każdego wierzchołka v tworzymy multizbiór (tj. zbiór z powtórzeniami) kolorów jego sąsiadów $S(v)$ i zapamiętujemy parę $(c(v), S(v))$. Pokolorujemy teraz graf na nowo w ten sposób, by dwa wierzchołki miały ten sam kolor tylko wtedy, gdy utworzyły wcześniej tę samą parę $(c(v), s(v))$. Postępujemy w ten sposób tak długo, dopóki zwiększa się liczba kolorów. Jeśli multizbiory kolorów wierzchołków G i H są inne, mamy pewność, że G i H nie są izomorficzne (dlaczego?). Zauważmy, że już po pierwszym kroku algorytm ten rozróżni grafy o innych posortowanych ciągach stopni wierzchołków. Łatwo wykazać, że poprawnie rozróżnia on drzewa. Z drugiej strony, nie rozróżnia grafów regularnych. Okazuje się jednak, że można ten pomysł uogólnić, kolorując wszystkie ciągi k wierzchołków. Jest to *algorytm Weisfeilera–Lehmana wymiaru k* i świetnie sprawdza się w praktyce. Już wymiar $k = 3$ wystarcza, aby rozróżnić grafy planarne. Niestety, okazuje się, że aby rozróżnić dowolne grafy w pesymistycznym przypadku potrzeba wymiaru co najmniej liniowego od n, a więc nie tędy droga do rozwiązania naszego problemu otwartego. Na szczęście pesymistyczne przypadki zdarzają się niezwykle rzadko w rzeczywistych danych.

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1585. Na ile sposobów można rozmieścić $3n$ kamieni na szachownicy $n \times n$ w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie trzy kamienie i były one rozłożone na co najwyżej dwóch polach?
Rozwiązanie na str. 4



M 1586. Kostkę postawiono na stole w taki sposób, że odległości jej wierzchołków od stołu to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Oblicz długość jej krawędzi.
Rozwiązanie na str. 5

M 1587. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (n, p) o tej własności, że p jest liczbą pierwszą większą od n oraz $n^2 + np + p^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 4

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 965. W miejscu tłustej plamy kartka robi się „przezroczysta". Fakt ten wykorzystuje się do budowy prostego fotometru – przyrządu do porównywania natężenia światła emitowanego przez dwa źródła. Kartkę papieru z tłustą plamą w jej środku należy oświetlić prostopadle, z dwóch stron, dwoma źródłami światła – nazwijmy je A i B. Odległości źródeł od kartki dobieramy tak, aby (przy prostopadłej obserwacji) zniknęła różnica jasności plamy i reszty kartki. Wówczas natężenia światła źródeł mają się do siebie, w przybliżeniu, jak kwadraty ich odległości od kartki: $I_A/I_B = (L_A/L_B)^2$. Wspomniane przybliżenie polega na założeniu, że tłusta plama przepuszcza całe padające na nią światło, a reszta kartki całkowicie je odbija. Jak należy zmodyfikować metodę pomiaru, żeby uzyskać poprawną wartość I_A/I_B bez tego założenia?
Rozwiązanie na str. 6

F 966. Samochód jadący w obszarze zabudowanym, po suchej drodze (współczynnik tarcia $f_0 = 0{,}6$) z maksymalną dozwoloną prędkością $v_0 = 50\,\mathrm{km/godz.}$ zatrzymuje się tuż przed pieszym. Z jaką prędkością v uderzyłby w pieszego, gdyby:

a) jechał z prędkością $v_1 = 60\,\mathrm{km/godz.}$

b) jechał z prędkością v_0, ale droga była mokra i współczynnik tarcia zmalałby do $f_1 = 0{,}4$?

Rozwiązanie na str. 9