

## Informatyczny kącik olimpijski (120): Piramidy

Tym razem omówimy zadanie z XII OIG.

Dana jest prostokątna plansza  $A$  o wymiarach  $n \times m$ . Wiersze zostały ponumerowane od 1 do  $n$ , zaś kolumny od 1 do  $m$ . Pole  $(1, 1)$  znajduje się w lewym górnym rogu planszy. Niektóre pola mają przypisaną wartość 1, pozostałe wartość 0 ( $A[x][y]$  oznacza wartość pola  $(x, y)$ ). Zerowym kwadratem nazywamy kwadrat, który pokrywa tylko zera. Dla każdej liczby całkowitej  $r$  z przedziału  $[1; \min(n, m)]$  należy policzyć, ile jest zerowych kwadratów o boku  $r$ .

### Wstęp

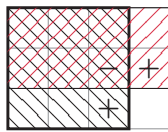
Naszym zadaniem jest obliczenie wartości  $w_1, w_2, \dots, w_{\min(n, m)}$ , gdzie  $w_i$  oznacza liczbę zerowych kwadratów o boku  $i$ . Załóżmy przez chwilę, że dla każdego pola  $(x, y)$  mamy obliczoną wartość  $D[x][y]$  – rozmiar największego zerowego kwadratu, którego prawym dolnym rogiem jest pole  $(x, y)$ . Zauważmy, że pole  $(x, y)$  jest również prawym dolnym rogiem zerowych kwadratów o boku:  $1, 2, \dots, D[x][y]$ . Rozważmy teraz ciąg  $w'_1, w'_2, \dots, w'_{\min(n, m)}$ , gdzie  $w'_i$  oznacza liczbę wystąpień wartości  $i$  w tablicy  $D$ . Wówczas  $w_i = w'_i + w'_{i+1} + \dots + w'_{\min(n, m)}$ .

### Sumy prefiksowe

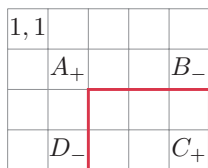
Niech  $S[x][y]$  oznacza sumę wartości w prostokącie, którego lewe górne pole ma współrzędne  $(1, 1)$ , zaś prawe dolne  $(x, y)$ . Formalnie:  $S[x][y] = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y A[i][j]$ . Obliczenie tablicy sum prefiksowych można zrealizować w czasie liniowym względem rozmiaru prostokąta, korzystając z poniższych zależności:

- $S[1][1] = A[1][1]$ ;
- $S[x][1] = S[x-1][1] + A[x][1]$  dla  $x > 1$ ;
- $S[1][y] = S[1][y-1] + A[1][y]$  dla  $y > 1$ ;
- $S[x][y] = A[x][y] + S[x-1][y] + S[x][y-1] - S[x-1][y-1]$ ;

$S[x][y]$  jest sumą: wartości pola  $(x, y)$ , prostokąta bez ostatniego wiersza, prostokąta bez ostatniej kolumny, pomniejszoną o sumę prostokąta bez ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, który został dodany dwa razy.



Zastanówmy się teraz, jak za pomocą tablicy sum prefiksowych obliczyć sumę wartości w prostokącie w czasie stałym. Niech  $A, B, C, D$  będą prostokątami, których lewe górne pole ma współrzędne  $(1, 1)$ , zaś prawe dolne pole zostało wskazane na poniższym rysunku.



Założmy, że chcemy obliczyć sumę wartości w kolorowym prostokącie. Jest to  $S(C) - S(B) - S(D) + S(A)$ , gdzie  $S(X)$  oznacza sumę wartości w prostokącie  $X$ .

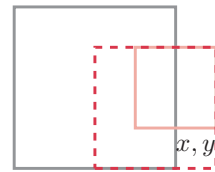
### Rozwiązanie $O(nm \cdot \log(\min(n, m)))$

W tym podejściu wyznaczmy wartości tablicy  $D$  przy wykorzystaniu metody wyszukiwania binarnego po wyniku. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość  $D[x][y]$  dla ustalonych  $x, y$ . Jeśli  $A[x][y] = 1$ , wtedy  $D[x][y] = 0$ . W przeciwnym przypadku  $D[x][y]$  jest liczbą całkowitą z przedziału  $[1; \min(x, y)]$ . Tę wartość możemy wyszukać binarnie po wyniku, korzystając z faktu: Jeśli  $(x, y)$  jest prawym dolnym rogiem zerowego kwadratu o boku  $r$ , to jest również prawym dolnym rogiem każdego mniejszego zerowego kwadratu. Sprawdzenie, czy  $(x, y)$  jest prawym dolnym rogiem zerowego kwadratu o boku  $r$ , można wykonać za pomocą sum prefiksowych w czasie  $O(1)$ . Algorytm wyszukiwania binarnego wykona  $O(\log(\min(n, m)))$  takich faz. Wszystkich pól jest  $nm$ , zatem wyznaczenie tablicy  $D$  działa w czasie  $O(nm \cdot \log(\min(n, m)))$ .

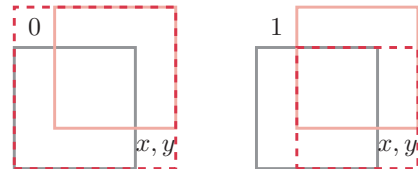
### Rozwiązanie dynamiczne $O(nm)$

W tym podejściu wyznaczmy wartości tablicy  $D$  przy wykorzystaniu metody programowania dynamicznego. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość  $D[x][y]$  dla ustalonych  $x, y$ . Jeśli  $A[x][y] = 1$ , wtedy  $D[x][y] = 0$ . W przeciwnym przypadku rozpatrujemy następujące możliwości.

- Jeśli  $x = 1$  lub  $y = 1$ , wtedy  $D[x][y] = 1$ . Dla wszystkich pól w pierwszym wierszu oraz w pierwszej kolumnie największy kwadrat ma rozmiar 1.
- Jeśli  $x, y > 1$  oraz  $D[x-1][y] \neq D[x][y-1]$ , wtedy  $D[x][y] = 1 + \min(D[x-1][y], D[x][y-1])$ .



- Jeśli  $x, y > 1$  oraz  $D[x-1][y] = D[x][y-1]$ , wtedy  $D[x][y] = k + l$ , gdzie  $k = D[x-1][y]$ , zaś  $l = 1$ , jeśli  $A[i-k][j-k] = 0$  i  $l = 0$  w przeciwnym przypadku.



Obliczenie wartości  $D[x][y]$  dla ustalonego  $(x, y)$  odbywa się w czasie  $O(1)$ . Plansza ma  $nm$  pól, zatem wyznaczenie tablicy  $D$  działa w czasie  $O(nm)$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ