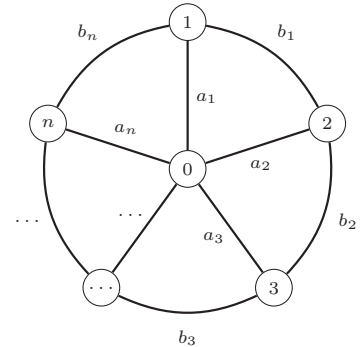


## Informatyczny kącik olimpijski (116): Bajtockie kółeczko

Tym razem omówimy zadanie *Bajtockie kółeczko* z pierwszego etapu zawodów drużynowych X Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów.

**Bajtockie kółeczko:** W Bajtocji znajduje się  $n + 1$  miast (ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 0 do  $n$ ) oraz  $2n$  dróg pomiędzy nimi. Miasta o numerach z przedziału  $[1; n]$  znajdują się na okręgu, zaś miasto o numerze 0 (stolica) jest środkiem tego okręgu. Pomiedzy każdym miastem na okręgu oraz stolicą istnieje dwukierunkowe połączenie ( $a_i$  oznacza czas przejazdu pomiędzy stolicą a  $i$ -tym miastem). Dodatkowo, pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi miastami na okręgu istnieje dwukierunkowe połączenie ( $b_i$  oznacza czas przejazdu pomiędzy  $i$ -tym miastem a miastem sąsiadującym z prawej strony). Naszym zadaniem jest zaplanowanie podróży po Bajtocji. W tym celu musimy wybrać miasto, z którego wyruszymy oraz miasta, które odwiedzimy. Podróż musi zaczynać się i kończyć w tym samym mieście. Każda droga oraz każde miasto (poza miastem, w którym zaczynamy i kończymy podróż) może zostać odwiedzone co najwyżej raz. Ile czasu potrwa najdłuższa taka podróż?



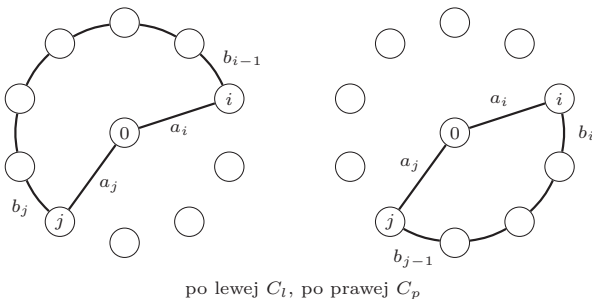
Naszym zadaniem, w terminologii grafowej, jest znalezienie cyklu o największej sumie wag krawędzi. Rozważmy dwa przypadki:

- do cyklu nie należy wierzchołek 0 – wówczas mamy tylko jedną możliwość wyboru cyklu, którego suma wag krawędzi wynosi:  $b_1 + b_2 + \dots, b_n$ ;
- do cyklu należy wierzchołek 0 – ten przypadek zostanie dokładnie opisany w dalszej części rozwiązania.

### Rozwiązanie $O(n^3)$

Rozważamy przypadek, kiedy stolica należy do cyklu. W tym przypadku dokładnie dwie krawędzie incydentne ze stolicą należą do cyklu. Zauważmy, że dla ustalonych krawędzi incydentnych ze stolicą łatwo znaleźć najdłuższy cykl. Załóżmy, że do cyklu należą krawędzie:  $(0, i)$  oraz  $(0, j)$  dla  $i, j \in [1; n]$  i  $i < j$ . Wówczas istnieją dokładnie dwa cykle zawierające obie te krawędzie:

- $C_l$  – zakładamy, że od  $i$ -tego wierzchołka poruszamy się w lewo,
- $C_p$  – zakładamy, że od  $i$ -tego wierzchołka poruszamy się w prawo.



Suma wag krawędzi cyklu  $C_l$  wynosi:

$$W_l = a_i + b_{i-1} + \dots + b_1 + b_n + \dots + b_j + a_j,$$

zaś suma wag krawędzi cyklu  $C_p$  wynosi:

$$W_p = a_i + b_i + \dots + b_{j-1} + a_j.$$

Zatem dla ustalonych krawędzi incydentnych ze stolicą (krawędzi do wierzchołków  $i$  oraz  $j$ ) wynikiem jest  $\max(W_l, W_p)$ .

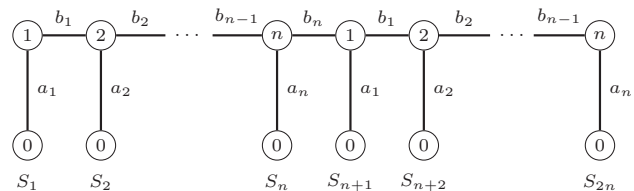
Aby znaleźć cykl o największej sumie wag krawędzi, wystarczy rozpatrzyć każdą parę krawędzi incydentnych ze stolicą. Dla każdej takiej pary należy obliczyć wynik i spośród otrzymanych wyników wybrać maksimum. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n^3)$ .

### Rozwiązanie $O(n^2)$

Zauważmy, że możemy w czasie stałym obliczać sumę wag krawędzi na spójnym fragmencie obwodu przy wykorzystaniu sum prefiksowych. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n^2)$ .

### Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

Ustawmy wierzchołki, które znajdują się na obwodzie, w ciąg (jeden za drugim) oraz zduplikujmy otrzymany ciąg.



Niech  $S_i$  oznacza odległość od wierzchołka numer 1 do kolejnych kopii stolicy, dokładnie:

$$S_i = \begin{cases} a_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j & \text{dla } 1 \leq i \leq n, \\ a_{i-n} + \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^{i-1-n} b_j & \text{dla } n < i \leq 2n. \end{cases}$$

Dla każdego całkowitego  $i \in [1; n]$  znajdujemy najdłuższy cykl, który zawiera krawędź  $(0, i)$ . Zauważmy, że długość tego cyklu wynosi:  $S_j - S_i + a_i$ , dla takiego największego  $S_j$ , że  $j \in [i + 1; i + n - 1]$ . Znalezienie największej takiej wartości w ciągu  $S$  można zrealizować drzewem przedziałowym (dlaczego?). Spośród wyników obliczonych dla każdego  $i \in [1; n]$  wybieramy największy. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n \cdot \log(n))$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ