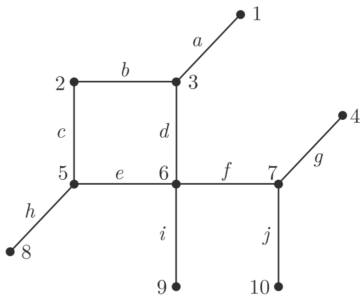

Wierzchołki oznaczono liczbami, krawędzie – literami. Jedyne możliwe przyporządkowania to:
$1a$, $2b$, $3d$, $6e$, $5c$, $8h$, $9i$, $7f$, $4g$, $10j$ albo $1a$, $3b$, $2c$, $5e$, $6d$, $8h$, $9i$, $7f$, $4g$, $10j$.

Informatyczny kącik olimpijski (103): Przeciąganie liny

W tym miesiącu proponujemy zadanie *Przeciąganie liny*, które pojawiło się w podwarszawskim Józefowie, podczas zeszłorocznej Bałtyckiej Olimpiady Informatycznej. Zadanie opisuje problem optymalizacji znanej wakacyjno-urlopowej zabawy. Co ciekawe, warstwa fabularna proponowanego rozwiązania – choć pozostaje w podobnych klimatach – to jednak odchodzi od liny na rzecz plecaka. Ale po kolei:

W zadaniu rozważamy $2n$ osób chcących zabawić się w tytułową grę. Lina do zabawy ma przygotowane $2n$ uchwytów, po n z każdej strony. Każda z osób deklaruje zawczasu dwa uchwyty, przy których chciałaby się znaleźć. Znamy również siłę każdej z osób, wyrażoną przez liczbę naturalną od 1 do s. Naszym celem jest ustalić, czy jest możliwe takie ustawienie uczestników zabawy, aby każdy dostał jeden z dwóch wybranych przez siebie uchwytów oraz aby różnica sił między dwiema drużynami nie przekraczała pewnej danej liczby k.

Ograniczenia opisane w zadaniu wydają się dość dziwaczne. Najlepiej jest na nie spojrzeć w następujący sposób. Rozważmy graf G, w którym wierzchołki reprezentują uchwyty, a krawędzie – ludzi. Krawędź e łączy wierzchołki u i v wtedy i tylko wtedy, gdy osoba e zadeklarowała jako ulubione właśnie uchwyty u i v. W tym języku przyporządkowanie osobom uchwytów sprowadza się do (wzajemnie jednoznacznego) przyporządkowania krawędziom jednego z ich wierzchołków.

Nawet jeśli zapomnimy o warunku dotyczącym zrównoważenia sił obu stron, nie zawsze jest możliwe jakiekolwiek przyporządkowanie spełniające wszystkie preferencje dotyczące uchwytów. Przede wszystkim, w G każda spójna składowa o m wierzchołkach musi mieć dokładnie m krawędzi. Takie grafy to tak zwane pseudolasy, a więc zbiory rozłącznych pseudodrzew. Każde pseudodrzewo zawiera dokładnie jeden cykl (dlaczego?). W takim grafie istnieją tylko dwa różne przyporządkowania wierzchołków do sąsiednich krawędzi. Dla wierzchołków nie leżących na cyklu możliwy jest tylko jeden wybór. Na cyklu wybory są dwa: przyporządkujemy krawędzie kolejnym wierzchołkom albo zgodnie albo przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Wobec powyższego, nasze rozwiązanie w pierwszej fazie sprawdza, czy dane wejściowe rzeczywiście tworzą pseudolas. Jeśli nie, to oczywiście odpowiedź na zadanie brzmi również „nie”. Dalej zakładamy więc, że mamy do czynienia już tylko z pewnym zbiorem pseudodrzew. Jak zauważyliśmy wcześniej, dla każdego takiego pseudodrzewa mamy tylko dwie możliwości. Dla każdej z nich obliczmy jaką siłę do lewej strony liny wnosi. Te wartości oznaczmy jako a_i oraz b_i dla i-tego pseudodrzewa. Bez straty ogólności załóżmy, że zawsze $a_i \leqslant b_i$. Widzimy, że łączna siła lewej drużyny będzie równa co najmniej $\sum_i a_i$ i co najwyżej $\sum_i b_i = \sum_i a_i + \sum_i (b_i - a_i)$, przy czym każdy ze składników $(b_i - a_i)$ możemy dodać bądź nie, według naszego uznania. Pamiętajmy oczywiście, że chcemy, aby ta siła mieściła się między $(S/2 - k/2)$ a $(S/2 + k/2)$, gdzie S oznacza łączną siłę wszystkich osób.

To ostatnie spojrzenie na problem z zadania opiszemy w języku tak zwanego problemu plecakowego (ang. *knapsack problem*). Rozważmy plecak o pojemności maksymalnej $(S/2 + k/2 - \sum_i a_i)$ kg. Mamy dostępny zbiór przedmiotów (indeksowany i) o wagach $(b_i - a_i)$ kg. Pytamy, czy uda się nam zabrać przedmioty o łącznej wadze co najmniej $(S/2 - k/2 - \sum_i a_i)$ kg i jednocześnie nieprzekraczającej pojemności plecaka.

Problem plecakowy to klasyczny problem, który da się standardowo rozwiązać w czasie $O(nS)$. W naszym zadaniu możemy jednak znaleźć rozwiązania lepsze (o ile $s \ll n$), bo działające w czasie $O(\sqrt{S}) \cdot O(S) = O(S^{3/2})$.

Skorzystamy z założenia, że siła każdej osoby (a więc i wagi przedmiotów w problemie plecakowym) jest wyrażona liczbą naturalną. Wnioskujemy z tego, że istnieje co najwyżej $O(\sqrt{S})$ różnych wartości wag przedmiotów (suma m *różnych* liczb naturalnych jest równa co najmniej $\frac{(m-1)m}{2} = O(m^2)$). Pozostaje ostatni krok, zrealizowany za pomocą *programowania dynamicznego*:

Tworzymy (początkowo wypełnioną zerami) binarną tablicę t rozmiaru S, w której będziemy zaznaczać, czy da się przygotować plecak o ustalonej wadze. Działamy w pętli o $O(\sqrt{S})$ obrotach, w każdym obrocie dając dostęp do kolejnej unikatowej wagi przedmiotu.

Oto pseudokod jednego obrotu, dla nowej wagi w występującej q razy:

```
for i = S downto 1 do
if ((t[i]) == 1) then
    x := q, j := i;
    while (x < 0 and t[j + w] == 0) do
        x := x − 1;
        t[j + w] := 1;
        j := j + w;
```

W każdym kroku pętli albo uzyskujemy nową objętość plecaka albo kończymy dodawania dla ustalonej objętości. Oba zdarzenia mogą wystąpić S razy, stąd czas działania jednego obrotu pętli to faktycznie $O(S)$ tak, jak zapowiedzieliśmy.

Tomasz KAZANA