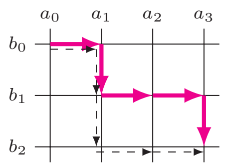
Informatyczny kącik olimpijski (96): Oblodzone drogi

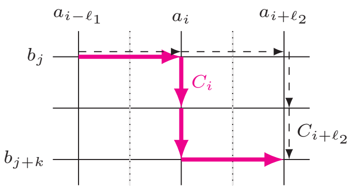
W tym miesiącu omówimy zadanie *Icy Roads* z obozu w Petrozawodsku z roku 2013. Sieć drogowa w mieście składa się z $n+1$ pionowych ulic oraz $m+1$ poziomych alei. Chcemy jak najszybciej dostać się ze skrzyżowania $(0,0)$ do skrzyżowania (n,m), pokonując $n+m$ odcinków dróg. Niestety, drogi są oblodzone i jeździ się po nich dość wolno: przejechanie jednego odcinka i-tej ulicy zajmuje czas a_i, zaś przejechanie jednego odcinka j-tej alei zajmuje czas b_j. Należy wyznaczyć najszybszą trasę przejazdu. Na rysunku 1 przedstawiono przykładową sieć i wyjaśniono, dlaczego algorytm zachłanny, który na każdym kolejnym skrzyżowaniu wybiera tę ulicę/aleję, która ma mniejszy czas przejazdu, nie jest poprawny.



Rys. 1. Przykładowa sieć dla $n=3$, $m=2$ o czasach przejazdu $a=[7,2,5,6]$ i $b=[5,3,7]$. Optymalna trasa o czasie $5+2+3+3+6=19$ została przedstawiona kolorowymi strzałkami. Zauważmy, że na skrzyżowaniu $(1,1)$ wybrany został odcinek alei o czasie przejazdu 3, zamiast ulicy o czasie przejazdu 2. Algorytm zachłanny (strzałki przerywane) znalazłby trasę o czasie $5+2+2+7+7=23$.

Pomimo prostego sformułowania, zadanie jest trudne i wymaga kilku pomysłowych obserwacji. Główna idea rozwiązania będzie opierać się na sukcesywnym blokowaniu tych ulic/alei, którymi nie opłaca się jeździć. Na początek pokażemy, że jeśli jakaś ulica i znajduje się pomiędzy dwiema ulicami o mniejszych czasach przejazdu, to można ją zablokować. Załóżmy, że w pewnym optymalnym rozwiązaniu przejeżdżamy odcinkami tej ulicy pomiędzy alejami j oraz $j+k$ (rys. 2). Niech $i-\ell_1$ oraz $i+\ell_2$ będą numerami tych niezablokowanych jeszcze ulic, pomiędzy którymi znajduje się ulica i (przy pierwszym czytaniu można przyjąć $\ell_1=\ell_2=1$). Zgodnie z założeniem mamy $a_{i-\ell_1} \leqslant a_i \geqslant a_{i+\ell_2}$. Czas przejazdu wynosi $C_i = b_j \cdot \ell_1 + a_i \cdot k + b_{j+k} \cdot \ell_2$. Natomiast czasy przejazdu, gdybyśmy zamiast ulicy i wybrali ulicę $i-\ell_1$ lub $i+\ell_2$ wynoszą odpowiednio $C_{i-\ell_1} = a_{i-\ell_1} \cdot k + b_{j+k} \cdot (\ell_1+\ell_2)$ oraz $C_{i+\ell_2} = b_j \cdot (\ell_1+\ell_2) + a_{i+\ell_2} \cdot k$. Widać jednak, że co najmniej jedna z tych tras ma czas nie większy niż optymalny:

$$\min(C_{i-\ell_1}, C_{i+\ell_2}) \leqslant \min(b_j, b_{j+k}) \cdot (\ell_1+\ell_2) + \max(a_{i-\ell_1}, a_{i+\ell_2}) \cdot k \leqslant C_i.$$



Rys. 2. Ilustracja do dowodu, że przy pewnych założeniach możemy zablokować ulicę i.

Powtarzając powyższe rozumowanie, możemy zablokować część ulic w mieście tak, że czasy przejazdu pozostałych będą tworzyć ciąg unimodalny (najpierw będą maleć, osiągając minimum na pewnej ulicy $i_\star$, a potem rosnąć). Zauważmy, że blokowanie ulic powoduje, że odległości między kolejnymi niezablokowanymi ulicami mogą się zwiększać (stąd konieczność uwzględnienia wartości ℓ_1 i ℓ_2 w powyższym dowodzie). Cały argument możemy niezależnie zastosować do alei (które zatem też będą tworzyć ciąg unimodalny, osiągając minimum na pewnej alei $j_\star$).

Druga obserwacja jest następująca: optymalna trasa będzie przechodziła przez skrzyżowanie $(i_\star, j_\star)$ najtańszej ulicy z najtańszą aleją. (Jeśli tak nie jest, to rozważamy punkt przecięcia trasy z ulicą $i_\star$ oraz punkt przecięcia trasy z aleją $j_\star$. Przejście pomiędzy tymi punktami po odcinkach ulicy $i_\star$ oraz alei $j_\star$ nie pogorszy rozwiązania.) Zatem możemy nasz problem podzielić na dwa niezależne problemy szukania trasy ze skrzyżowania $(i_\star, j_\star)$ do skrzyżowania $(0,0)$ oraz trasy ze skrzyżowania $(i_\star, j_\star)$ do skrzyżowania (n,m). Bez straty ogólności możemy więc założyć, że ciągi a i b czasów przejazdu dla niezablokowanych ulic i alei są rosnące.

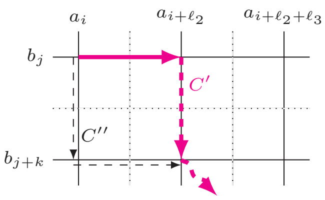
Pójdziemy jeszcze krok dalej i pokażemy silniejszy warunek na te ciągi, a mianowicie, że funkcje $i \mapsto a_i$ oraz $i \mapsto b_i$ dla niezablokowanych ulic/alei są wypukłe. Przez Δa_i oznaczmy średni przyrost czasu na odcinek od ulicy i do następnej niezablokowanej ulicy (analogicznie Δb_j dla alei). Zatem dla rysunku 2 mamy (przy dodatkowym założeniu, że aleje j i $j+k$ są sąsiednie):

$$\Delta a_{i-\ell_1} = \frac{a_i - a_{i-\ell_1}}{\ell_1}, \qquad \Delta a_i = \frac{a_{i+\ell_2} - a_i}{\ell_2}, \qquad \Delta b_j = \frac{b_{j+k} - b_j}{k}.$$

Ponownie rozpisując wzory na czasy przejazdu trasami C_i, $C_{i-\ell_1}$ i $C_{i+\ell_2}$, dostajemy, że

$$C_{i-\ell_1} \leqslant C_i \quad \text{wtw.} \quad \Delta b_j \leqslant \Delta a_{i-\ell_1}, \qquad C_{i+\ell_2} \leqslant C_i \quad \text{wtw.} \quad \Delta b_j \geqslant \Delta a_i.$$

Jeśli $\Delta a_{i-\ell_1} \geqslant \Delta a_i$, to co najmniej jeden z powyższych warunków jest spełniony, więc $\min(C_{i-\ell_1}, C_{i+\ell_2}) \leqslant C_i$ i można zablokować i-tą ulicę. Powtarzając to rozumowanie, powodujemy w końcu, że ciągi Δa oraz Δb dla niezablokowanych ulic/alei są rosnące.



Rys. 3. Ilustracja działania algorytmu zachłannego.

Pora na ostatnią obserwację: na tak poblokowanej sieci drogowej możemy już stosować algorytm zachłanny, tzn. na każdym skrzyżowaniu wybierać tę ulicę/aleję, która ma mniejszy współczynnik średniego przyrostu czasu. A konkretnie: będąc na skrzyżowaniu i-tej ulicy z j-tą aleją wybieramy ulicę, jeśli $\Delta b_j \leqslant \Delta a_i$, a aleję, jeśli $\Delta b_j > \Delta a_i$. Dowód poprawności tego algorytmu przeprowadzimy przez indukcję po $i+j$. Dla $i+j=n+m$ teza jest oczywista (jesteśmy na ostatnim skrzyżowaniu i nie mamy co wybierać). Załóżmy zatem, że algorytm zachłanny działa poprawnie, jeśli startujemy z dowolnego skrzyżowania (i', j') dla którego $i'+j' > i+j$. Ponadto załóżmy (rys. 3), że jest spełnione $\Delta b_j \leqslant \Delta a_i$, ale w rozwiązaniu optymalnym wybieramy aleję, zatem jedziemy do skrzyżowania $(i+\ell_2, j)$. Z wypukłości mamy $\Delta a_i < \Delta a_{i+\ell_2}$, zatem tym bardziej jest spełnione $\Delta b_j \leqslant \Delta a_{i+\ell_2}$, więc z założenia indukcyjnego wynika, że w drugim ruchu wybierzemy ulicę, przesuwając się do skrzyżowania $(i+\ell_2, j+k)$. Te dwa ruchy kosztowały nas czas $C' = b_0 \cdot \ell_2 + a_1 \cdot k$. Jednakże rozwiązanie, w którym dostajemy się do skrzyżowania $(i+\ell_2, j+k)$ najpierw jadąc ulicą, a potem aleją, ma czas $C'' = a_0 \cdot k + b_1 \cdot \ell_2$. Nietrudno się przekonać, że warunek $\Delta b_j \leqslant \Delta a_i$ jest równoważny temu, że $C'' \leqslant C'$. To pokazuje, że istnieje optymalne rozwiązanie, w którym pierwszym ruchem jest wybór ulicy, co kończy dowód.

Myślę, że Czytelnicy, którzy przebrnęli przez powyższy opis algorytmu nie będą mieli trudności, by zaimplementować go w optymalnej złożoności czasowej $O(n+m)$.

Tomasz IDZIASZEK