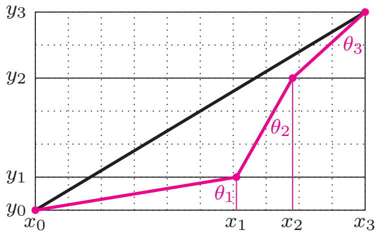
Informatyczny kącik olimpijski (95): Optymalna trasa łazika

Tym razem na warsztat weźmiemy zadanie *Remote Rover*, które pojawiło się na jednym z konkursów TopCoder w roku 2005. Naszym zadaniem jest znalezienie najszybszej trasy dla marsjańskiego łazika poruszającego się po zróżnicowanym terenie. Teren ten możemy przedstawić jako prostokąt, w którym początkowe położenie łazika i punkt docelowy są jego przeciwległymi wierzchołkami. Prostokąt jest podzielony na n poziomych pasów o różnej szerokości; każdy z pasów charakteryzuje się inną prędkością maksymalną, którą może osiągać na nim łazik. A konkretnie: i-ty pas jest ograniczony prostymi $y = y_{i-1}$ oraz $y = y_i$, a łazik może na nim jechać z prędkością v_i.

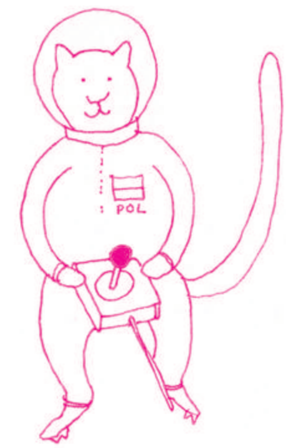


Na rysunku obok przedstawiono przykładowy teren, w którym szukamy najszybszej drogi między punktami $(x_0, y_0) = (0, 0)$ i $(x_n, y_n) = (10, 6)$. Podzielony jest na $n = 3$ pasy, o kolejnych szerokościach 1, 3 i 2 (wyznaczone przez proste $y_1 = 1$ i $y_2 = 4$) i prędkościach przejazdu $v_1 = 10$, $v_2 = 5$ i $v_3 = 7{,}5$. Czas przejazdu drogą w linii prostej wynosi 1,879, najkrótszy zaś czas przejazdu równy 1,704 uzyskamy, jadąc dłużej pasem dopuszczającym większą prędkość łazika, a konkretnie przejeżdżając przez zaznaczone kolorem punkty $(x_1, y_1) = (6{,}097, 1)$ i $(x_2, y_2) = (7{,}799, 4)$.

Jest jasne, że najszybsza droga między dwoma punktami na płaszczyźnie przebiega po linii prostej, ale tylko w przypadku terenu o jednakowej charakterystyce. Tak więc jeśli wyznaczymy punkty $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, przez które łazik będzie przejeżdżał, zmieniając pasy, to droga będzie prowadzić odcinkami łączącymi te punkty.

Czas potrzebny na pokonanie tej drogi wyraża się wzorem

$$T(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{1 \le i \le n} \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}{v_i}.$$



Naszym zadaniem jest znalezienie zmiennych $x_1, \ldots, x_{n-1}$ minimalizujących wartość funkcji T. Odpowiada to znalezieniu punktu, w którym zerują się wszystkie pochodne cząstkowe funkcji T. Pochodna po zmiennej x_i jest następująca:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{v_{i+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2v_i}\frac{2(x_i - x_{i-1})}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} + \frac{1}{2v_{i+1}}\frac{-2(x_{i+1} - x_i)}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}.$$

Jeśli przez θ_i oznaczymy kąt pomiędzy linią pionową a odcinkiem łączącym punkty (x_{i-1}, y_{i-1}) i (x_i, y_i), to dostaniemy

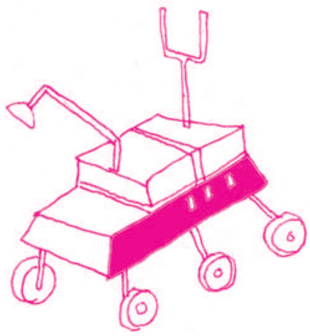
$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} = \sin\theta_i,$$

zatem pochodna po x_i upraszcza się do

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\sin\theta_i}{v_i} - \frac{\sin\theta_{i+1}}{v_{i+1}}.$$

Jeśli więc pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych $x_1, \ldots, x_{n-1}$ mają być równe zero, to musi być spełniony następujący układ równań:

$$(\star) \qquad \sin\theta_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{v_i}\sin\theta_i \qquad \text{dla } 1 \le i < n.$$



Zauważmy, że ustalenie wartości θ_1 powoduje jednoznaczne wyznaczenie pozostałych wartości kątów, a to z kolei wyznacza nam wartości zmiennych $x_1(\theta_1), \ldots, x_{n-1}(\theta_1)$ oraz pewną wartość zmiennej $x_n(\theta_1)$, przy czym niekoniecznie równą długości prostokąta. Innymi słowy, przy ustalonym θ_1 układ $(\star)$ określa, jakie warunki musi spełniać najszybsza droga do górnego boku prostokąta, a uzyskana wartość $x_n(\theta_1)$ oznacza położenie ostatniego punktu na tej drodze. Widać, że $x_n(\theta_1)$ jest monotoniczną funkcją zmiennej θ_1 (zwiększenie θ_1 powoduje zwiększenie wszystkich pozostałych kątów), więc możemy zastosować wyszukiwanie binarne, aby znaleźć taką wartość $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$, że $x_n(\theta_1) = x_n$. Należy jednak pamiętać o przypadku, gdy dla dużych kątów przy rozwiązywaniu układu $(\star)$ rozwiązanie nie będzie istnieć (gdy prawa strona jednego z równań będzie większa niż 1).

Na koniec wspomnijmy, że wzór $(\star)$ może być znany Czytelnikom z lekcji fizyki, gdzie pod nazwą *prawa Snella* opisywał zmianę kierunku biegu promienia światła przy przejściu przez granicę między dwoma ośrodkami o różnych współczynnikach załamania (zależnych od prędkości światła w tych ośrodkach). Jaki jest związek między naszym zadaniem, a zachowaniem się światła w różnych ośrodkach, pozostawiamy Czytelnikom do samodzielnego zbadania.

Tomasz IDZIASZEK