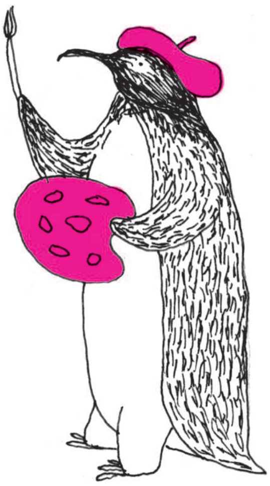
$K = \max\{w_i + W_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n\}$



Informatyczny kącik olimpijski (91): Kolorowanie cyklu

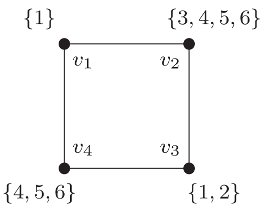
Zagadnienie kolorowania cyklu niejednokrotnie pojawiało się na konkursach programistycznych, m.in. na Mistrzostwach Europy Środkowej w Programowaniu Zespołowym (zadanie *Beijing Guards* z roku 2004), czy też Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym (zadanie *Słoneczna wyspa* z roku 2010). Dany jest cykl o n wierzchołkach $v_1, \ldots, v_n$, którym trzeba tak przyporządkować kolory, by:

(1) wierzchołek v_i dostał dokładnie w_i różnych kolorów;
(2) każda para sąsiadujących wierzchołków dostała rozłączne zestawy kolorów;
(3) liczba użytych różnych kolorów była jak najmniejsza.

Zadanie to ma bardzo proste rozwiązanie w przypadku cyklu o długości parzystej. Do pokolorowania pary sąsiadujących wierzchołków v_i i v_{i+1} potrzebujemy $w_i + w_{i+1}$ różnych kolorów (zakładamy dla uproszczenia, że $w_{n+1} = w_1$). Zatem w sumie potrzebujemy ich co najmniej

$$K = \max\{w_i + w_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Okazuje się, że tyle różnych kolorów wystarczy. Jeśli oznaczymy te kolory kolejnymi liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots, K$, to wierzchołkom o numerach parzystych możemy przyporządkować początkowe kolory z listy, a wierzchołkom o numerach nieparzystych – kolory z końca listy. Innymi słowy, wierzchołek i-ty dostanie kolory $\{1, 2, \ldots, w_i\}$, jeśli i jest nieparzyste, lub kolory $\{K - w_i + 1, \ldots, K\}$, jeśli i jest parzyste (patrz rysunek 1). Zauważmy, że powyższy algorytm działa nie tylko dla cyklu o długości parzystej, ale również dla ścieżek, drzew i w ogólności dla dowolnych grafów dwudzielnych.



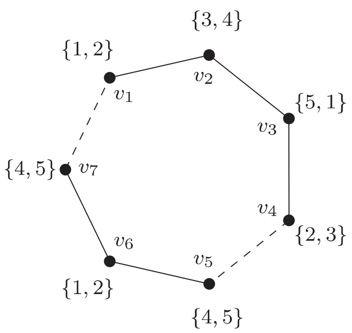
Rys. 1. Przykład dla cyklu o $n = 4$ wierzchołkach i zapotrzebowaniach na kolory $w_1 = 1$, $w_2 = 4$, $w_3 = 2$, $w_4 = 3$. Do pokolorowania go wystarczy $K = 6$ różnych kolorów.

W przypadku cyklu o długości nieparzystej $n = 2m + 1$ powyższe rozwiązanie nie działa. Już dla $n = 3$ widzimy, że potrzebne jest $w_1 + w_2 + w_3$ różnych kolorów. W ogólnym przypadku musimy sumarycznie wykonać $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$ przydziałów kolorów. Ponieważ największy zbiór niezależny na cyklu (tzn. zbiór wierzchołków niepołączonych krawędziami) ma rozmiar m, więc każdy kolor przydzielimy do co najwyżej m wierzchołków. Potrzebować więc będziemy co najmniej $\lceil \frac{W}{m} \rceil$ różnych kolorów. Okazuje się, że wystarczająca liczba kolorów to

$$K' = \max\left\{K, \lceil \tfrac{W}{m} \rceil\right\}.$$

Niech k będzie taką najmniejszą liczbą, że $\sum_{i=1}^{2k+1} w_i \leqslant kK'$. Liczba ta istnieje, bo w szczególności nierówność powyższa jest spełniona dla $k = m$. Podzielimy teraz wierzchołki cyklu na dwie grupy, które będziemy kolorować na dwa różne sposoby (patrz przykład na rysunku 2). Wierzchołki $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ kolorujemy cyklicznie, tzn. po kolei nadając im kolory z listy

$$1, 2, \ldots, K',\ 1, 2, \ldots, K',\ 1, 2, \ldots, K',\ \ldots$$



Rys. 2. Przykład dla $n = 7$ wierzchołków, z których każdy potrzebuje dwóch kolorów ($w_i = 2$). Zgodnie z algorytmem potrzebujemy $K' = \max\{4, \lceil \frac{14}{3} \rceil\} = 5$ kolorów. Ponieważ $k = 2$, więc wierzchołki v_1, v_2, v_3, v_4 kolorujemy cyklicznie, a wierzchołki v_5, v_6, v_7 zgodnie z parzystością.

Natomiast wierzchołki $v_{2k+1}, \ldots, v_n$ kolorujemy, używając metody dla cyklu długości parzystej, tzn. wierzchołkom nieparzystym przyporządkowujemy kolory $\{K' - w_i + 1, \ldots, K'\}$, a wierzchołkom parzystym kolory $\{1, 2, \ldots, w_i\}$.

Pozostaje wykazać, że końce krawędzi łączących te dwie grupy wierzchołków są pokolorowane poprawnie. Dla krawędzi $v_1 v_n$ jest prosto: wierzchołek v_1 używa kolorów $\{1, \ldots, w_1\}$, a wierzchołek v_n kolorów $\{K' - w_n + 1, \ldots, K'\}$, wiemy też, że $K' \geqslant w_1 + w_n$. Dowód dla krawędzi $v_{2k} v_{2k+1}$ jest trudniejszy. Ponieważ

$$(k-1)K' < \sum_{i=1}^{2k-1} w_i \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{2k+1} w_i \leqslant kK',$$

więc wierzchołkowi v_{2k} zostaną przypisane kolory ze *spójnego* przedziału liczb naturalnych $\{\alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + w_{2k}\}$, gdzie $\alpha = \left(\sum_{i=1}^{2k-1} w_i\right) \bmod K'$. Ponadto spełnione jest $\alpha + w_{2k} + w_{2k+1} \leqslant K'$, więc żaden kolor z tego przedziału nie jest kolorem ze zbioru kolorów $\{K' - w_{2k+1} + 1, \ldots, K'\}$ przypisanych do v_{2k+1}.

Powyższy algorytm wyznaczający kolorowanie cyklu ma złożoność czasową $O(n)$.

Tomasz IDZIASZEK