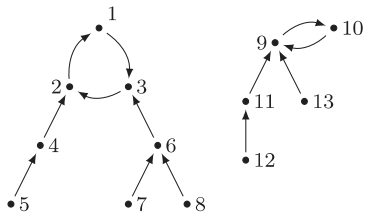
Informatyczny kącik olimpijski (89): Darmowe rozmowy

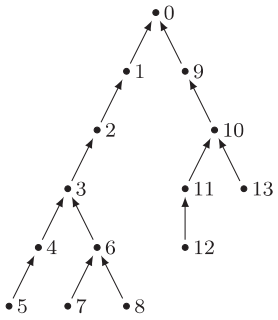
W tym miesiącu rozwiążemy zadanie *Darmowe rozmowy* z Obozu Naukowo-Treningowego im. Antoniego Kreczmara w roku 2011. Firma telekomunikacyjna, chcąc poinformować swoich klientów o nowej promocji, zleciła jednemu ze swoich pracowników, aby osobiście zadzwonił on do niektórych klientów. Klientów jest n, a ponadto każdy z nich może zadzwonić do jednej ustalonej osoby za darmo. Pracownik wychodzi z założenia, że promocja jest tak świetna, że każdy klient, który się o niej dowie, będzie chciał się podzielić tą wiedzą z kimś innym, ale że ludzie są z natury oszczędni, poinformuje on tylko tę osobę, do której może zadzwonić bezpłatnie. Pracownik ma czas wykonać k telefonów do klientów. Należy wyznaczyć, do których powinien zadzwonić, aby zmaksymalizować liczbę osób, które dowiedzą się o promocji.



Rys. 1. Przykładowy graf o $n = 13$ wierzchołkach. Dla $k = 2$ najbardziej opłaca się zadzwonić do klienta 12 (co spowoduje, że o promocji dowiedzą się klienci 12, 11, 9 i 10) oraz jednego z klientów 5, 7 lub 8 (co poinformuje dodatkowych pięciu klientów).

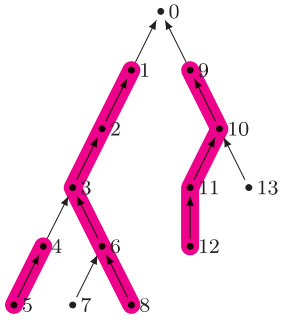
Zbiór klientów możemy przedstawić jako graf skierowany o n wierzchołkach, w którym istnieje krawędź od wierzchołka i do wierzchołka j, jeśli klient i może za darmo zadzwonić do klienta j (rys. 1). Zatem zadzwonienie do klienta i spowoduje, że klienci odpowiadający wszystkim wierzchołkom osiągalnym z wierzchołka i dowiedzą się o promocji.

Graf skierowany, w którym z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie jedna krawędź, ma dość specyficzną strukturę: każda jego spójna składowa jest cyklem z podoczepianymi drzewami. W przypadku naszego zadania możemy tę strukturę jeszcze uprościć, konstruując skierowane drzewo o tej własności, że z optymalnego rozwiązania dla drzewa łatwo odtworzymy optymalne rozwiązanie dla pierwotnego grafu. Mianowicie każdą składową zastępujemy pojedynczą ścieżką o tej samej długości co cykl w tej składowej, a do końca tej ścieżki podczepiamy wszystkie drzewa ze składowej. Na końcu zaś wszystkie ścieżki podczepiamy do nowego wierzchołka 0 (rys. 2). Pokazanie odpowiedniości między rozwiązaniami dla drzewa i pierwotnego grafu pozostawimy jako nietrudne ćwiczenie dla Czytelników.



Rys. 2. Drzewo skonstruowane na podstawie grafu z rysunku 1.

W tym momencie nasze zadanie jest następujące: chcemy wybrać k wierzchołków w skierowanym drzewie tak, aby liczba wierzchołków z nich osiągalnych była jak największa. Na początek poczyńmy dwie oczywiste obserwacje: wybierając wierzchołki, wystarczy ograniczyć się do liści w drzewie (w szczególności bez straty ogólności możemy założyć, że k jest nie większe niż liczba liści). Ponadto w przypadku $k = 1$ należy wybrać ten z liści, który leży w najdalszej odległości od korzenia drzewa. Okazuje się, że również dalej działa podejście zachłanne: kolejne liście opłaca się wybierać tak, aby leżały jak najdalej od zbioru wierzchołków już zaznaczonych (rys. 3).



Rys. 3. Kolejne liście znajdowane przez algorytm zachłanny to, na przykład, 8, 12, 5, 7 i 13. Kolorem zaznaczono wierzchołki osiągalne dodawane w kolejnych fazach algorytmu.

Pomysł ten możemy zaimplementować następująco: wykonujemy k faz algorytmu. Zakładamy, że na początku i-tej fazy mamy zaznaczony w drzewie zbiór S_i wierzchołków osiągalnych z liści wybranych w poprzednich fazach. W fazie obliczamy odległości pozostałych wierzchołków do zbioru S_i, wybieramy liść o największej odległości i zaznaczamy wszystkie wierzchołki z niego osiągalne. Pojedynczą fazę wykonujemy w czasie $O(n)$, zatem cały algorytm działa w czasie $O(kn)$.

Rozwiązanie to można przyspieszyć. Wierzchołki dodawane w kolejnych fazach tworzą ścieżki. Każda krawędź takiej ścieżki wchodząca do danego wierzchołka wychodzi z jednego z tych jego synów, których poddrzewa mają największą głębokość. Możemy zatem obliczyć wszystkie te ścieżki w czasie $O(n)$, przeglądając drzewo od liści w górę, dla każdego wierzchołka pamiętając głębokość jego poddrzewa. Następnie wybieramy k najdłuższych ścieżek, sortując ich długości przez zliczanie.

A jak udowodnić poprawność rozwiązania zachłannego? Niech R_j będzie zbiorem wierzchołków, które leżą w odległości j od najbliższego liścia. W szczególności R_0 jest zbiorem liści i z tego zbioru chcemy zaznaczyć pewne k wierzchołków. Poruszając się w górę drzewa z tych wierzchołków, zaznaczymy ich rodziców, którzy znajdują się w zbiorze R_1, przy czym opłaca nam się tak wybrać liście, aby zbiór tych rodziców był jak największy. Oczywiście, będzie on miał rozmiar co najwyżej $\min(|R_1|, k)$. W ogólności, ze zbioru R_j zaznaczymy co najwyżej $\min(|R_j|, k)$ wierzchołków. Załóżmy, że zbiór S_i jest optymalnym rozwiązaniem dla $i = k$, to znaczy, że dla każdego j w zbiorze R_j zaznaczamy dokładnie $\min(|R_j|, i)$ wierzchołków. Jeśli liść wybrany w i-tej fazie algorytmu leży w odległości ℓ, to znaczy, że z każdego ze zbiorów $R_0, \ldots, R_{\ell-1}$ zaznaczymy po jednym wierzchołku, natomiast wszystkie wierzchołki w zbiorach $R_\ell, R_{\ell+1}, \ldots$ są już zaznaczone (więc ich rozmiary są nie większe niż i). Wynika z tego, że zbiór S_{i+1} jest też optymalny, bo dla każdego j w zbiorze R_j zaznaczymy $\min(|R_j|, i + 1)$ wierzchołków.

Co ciekawe, powyższy dowód daje nam prostsze rozwiązanie w przypadku, gdy interesuje nas tylko maksymalna *liczba* klientów, którzy dowiedzą się o promocji. Wystarczy bowiem w czasie $O(n)$ wyznaczyć rozmiary zbiorów R_j.

Tomasz IDZIASZEK