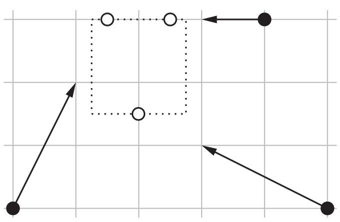
Informatyczny kącik olimpijski (69): Świetliki

Tym razem w kąciku zadanie *Świetliki*, z którym mierzyli się finaliści Potyczek Algorytmicznych 2013. Po płaszczyźnie porusza się n świetlików. Dla każdego z owadów znamy punkt płaszczyzny, w którym znajdował się początkowo, oraz wiemy, że porusza się on ze stałym (i znanym nam) wektorem prędkości. Należy wyznaczyć minimalną długość, jaką może mieć bok kwadratu, który będzie w pewnej chwili zawierał wszystkie świetliki, przy czym boki kwadratu muszą być ustawione równolegle do osi układu współrzędnych (rysunek). Oznaczmy jeszcze przez M ograniczenie na zakres liczb danych w zadaniu.



Czarne kropki to trzy świetliki znajdujące się w chwili $t = 0$ w punktach $(0, 0)$, $(5, 0)$ i $(4, 3)$, poruszające się z prędkościami $(1, 2)$, $(-2, 1)$ i $(-1, 0)$. Zaznaczono też kwadrat o minimalnym boku 1,5, w którym znajdą się świetliki w chwili $t = 1{,}5$.

Zacznijmy od wykorzystania technik standardowych przy tego typu zadaniach. Bok kwadratu możemy wyznaczyć, stosując wyszukiwanie binarne, zatem $O(\log M)$ razy będziemy musieli odpowiedzieć na pytanie „czy istnieje taka chwila t, że wszystkie świetliki zmieszczą się w kwadracie o boku d?".

Kolejne standardowe spostrzeżenie: istnieje optymalne rozwiązanie, w którym skrajnie lewy świetlik znajduje się na lewym boku kwadratu. Dla ustalonego świetlika i możemy w czasie $O(n)$ wyznaczyć przedział czasu, w którym znajduje się on po lewej stronie od każdego innego świetlika. Ograniczywszy się do tego przedziału czasu, unieruchamiamy tego świetlika, zaczepiając w nim układ współrzędnych (tzn. odejmujemy jego prędkość i pozycję od prędkości i pozycji wszystkich pozostałych świetlików).

Znamy bok i położenie kwadratu w poziomie, musimy teraz sprawdzić, czy istnieje taka chwila t i takie jego położenie w pionie y $(0 \leqslant y \leqslant d)$, które zawiera wszystkie owady. Nietrudno się przekonać, że dla ustalonego świetlika zbiór punktów (t, y), dla których świetlik ten znajduje się w chwili t w kwadracie przesuniętym o y, jest równoległobokiem. A konkretnie: jeśli świetlik j znajduje się w punkcie (d, y_1) w chwili t_1, a w punkcie $(0, y_2)$ w chwili t_2, to wierzchołkami szukanego równoległoboku są punkty (t_1, y_1), $(t_1, y_1 + d)$, $(t_2, y_2 + d)$ i (t_2, y_2). Wyznaczenie równoległoboków dla wszystkich owadów zajmie nam czas $O(n)$, a następnie sprawdzenie, czy ich przecięcie jest niepuste – czas $O(n \log n)$.

Ostatecznie nasze rozwiązanie działa w czasie $O(n^2 \log n \log M)$.

Istnieje szybsze (i prostsze do zaimplementowania) rozwiązanie działające w czasie $O(n \log M)$, wymaga ono jednak pewnej nie do końca oczywistej obserwacji. Oznaczmy przez $F(t)$ najmniejszy bok kwadratu dla ustalonej chwili t. Czy możemy coś powiedzieć o funkcji F? Jasne jest, że powyżej pewnej granicy wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej argumentu t funkcja F będzie rosnąć. Okazuje się, że możemy powiedzieć dużo więcej – funkcja F jest *wypukła*. Dzięki temu możemy znaleźć jej minimum, stosując *wyszukiwanie ternarne*, co będzie wymagało obliczenia jej wartości w $O(\log M)$ punktach. Dla ustalonego t obliczenie $F(t)$ jest bardzo proste (wyznaczamy pozycje świetlików i znajdujemy prostokąt otaczający) i wymaga czasu $O(n)$. Musimy tylko pamiętać, że rozwiązaniem zadania jest $F(0)$, jeśli minimum F znajdzie się w punkcie $t < 0$.

Pozostaje udowodnić kluczowy fakt o wypukłości funkcji F. Oznaczmy przez $F_{i,j}(t)$ rozmiar najmniejszego kwadratu zawierającego świetliki i oraz j. Ponieważ w każdej chwili wynikowy kwadrat opiera się na dwóch świetlikach po jego przeciwnych stronach, to

$$F(t) = \max_{i,j} F_{i,j}(t).$$

Funkcja $F_{i,j}(t)$ jest wypukła (łatwo to zobaczyć, jeśli znów zaczepimy układ współrzędnych w świetliku i). Tak więc funkcja F jest również wypukła, jako maksimum funkcji wypukłych.

Tomasz IDZIASZEK

Rozwiązanie zadania F 849.
Początkowo obręcz ślizga się po parkiecie. Jej ruch jest ruchem jednostajnie opóźnionym wskutek działania stałej siły tarcia $F_T = \mu m g$ skierowanej przeciwnie do kierunku ruchu, a jej ruch obrotowy także jest jednostajnie opóźniony wskutek działania stałego momentu siły tarcia $M_T = \mu m g R$. Obręcz zatrzyma się zatem w ruchu postępowym po czasie

$$\Delta t_1 = \frac{v_0}{\mu g},$$

przebywszy w tym czasie drogę

$$d_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g},$$

a jej prędkość kątowa będzie wynosiła wówczas

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{M_T}{I}\Delta t_1 = \omega_0 - \frac{V_0}{R}.$$

Od tego momentu obręcz będzie poruszać się z przyspieszeniem wywołanym siłą tarcia, a ruch obrotowy będzie nadal spowalniał. Dla dostatecznie dużych ω_0 prędkość punktu styczności obręczy z podłożem będzie różna od zera i obręcz wróci do baletnicy w czasie $\Delta t_2 = \Delta t_1$ z prędkością kątową

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{2V_0}{R};$$

prędkość punktu styczności z podłożem będzie wtedy równa $-v_0 + R\omega_2 = R\omega_0 - 3v_0$. Oznacza to, że szukany warunek to

$$\frac{\omega_0}{v_0} \geqslant \frac{3}{R}.$$

Dla mniejszych wartości ω_0 przy zerowaniu się prędkości punktu styczności z podłożem rozpocznie się ruch bez poślizgu; ruch ten będzie się odbywał ze stałą prędkością i warunek $\Delta t_1 = \Delta t_2$ nie będzie spełniony.