Zliczanie podziałów liczby: algorytm Eulera

Wojciech RYTTER[*]

Podziały liczb są ciekawymi obiektami kombinatorycznymi o dosyć skomplikowanych własnościach. W tym artykule przedstawimy dwa algorytmy zliczania takich obiektów. Pierwszy prosty algorytm będzie działał w czasie $O(n^2)$ i pamięci $O(n^2)$, natomiast drugi, pochodzący od Eulera i oparty na tzw. liczbach *pentagonalnych*, w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.

Podział $\pi = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ liczby naturalnej n na r części to przedstawienie tej liczby w postaci sumy r dodatnich liczb całkowitych

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r, \qquad \text{gdzie } \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r.$$

Wszystkie podziały liczby n, w porządku antyleksykograficznym, można wygenerować iteracyjnie następująco. Zaczynamy od trywialnego podziału $\pi = (n)$. W celu wygenerowania następnego podziału szukamy pierwszego $\lambda_i \geqslant 2$ od prawej strony, zastępujemy λ_i przez $\lambda_i - 1$, a pozostałe składniki na prawo dobieramy tak, aby otrzymany podział był jak największy leksykograficznie. Na przykład podziały $n = 5$ w porządku antyleksykograficznym to:

$$5, \quad 4+1, \quad 3+2, \quad 3+1+1, \quad 2+2+1, \quad 2+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1.$$

Oznaczmy przez $p(n)$ liczbę podziałów liczby n, mamy:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Dla $n < 0$ przyjmujemy, czysto formalnie, że $p(n) = 0$.

Oznaczmy przez $p(n,k)$ liczbę podziałów liczby n na k części. Algorytm o czasie kwadratowym wyznaczania $p(n)$ dla $n \geqslant 1$ polega na obliczeniu (kwadratowej liczby) wartości $p(n,k)$ na podstawie rekurencji:

$$p(n,k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k > n \text{ lub } k \leqslant 0, \\ p(n-1,k-1) + p(n-k,k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Rekurencja wynika stąd, że mamy dwa przypadki:

- $\lambda_k = 1$: Wtedy mamy $p(n-1,k-1)$ podziałów z pominięciem λ_k.
- $\lambda_k > 1$: Wtedy możemy odjąć jeden od każdego λ_i, otrzymując podział liczby $n-k$ na k części.

W celu szybszego obliczenia $p(n)$ rozważymy podziały na różne części, tzn.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r.$$

Niech $\widetilde{p}(n)$ będzie liczbą takich podziałów. Przez $p_{\text{even}}(n)$, $\widetilde{p}_{\text{even}}(n)$, $p_{\text{odd}}(n)$, $\widetilde{p}_{\text{odd}}(n)$ oznaczmy liczbę podziałów n na parzystą/nieparzystą liczbę części (o różnych rozmiarach w przypadku symboli z $\widetilde{\ }$).

Na przykład $\widetilde{p}(15) = 27$, $\widetilde{p}_{\text{odd}}(15) = 14$, $\widetilde{p}_{\text{even}}(15) = 13$, patrz też rysunek 3 (str. 9).

Zauważmy, że liczby $\widetilde{p}(n)$ są przeważnie znacznie mniejsze od liczb $p(n)$ (chociaż na początku niewiele się różnią).

Możemy również zdefiniować $\widetilde{p}(n,k)$ – liczbę podziałów n na k różnych części. Na przykład $\widetilde{p}(50,7) = 522$, co Euler obliczył prawie 300 lat temu bez użycia komputera (ani kalkulatora), odpowiadając na pytanie matematyka Philippe'a Naudégo.

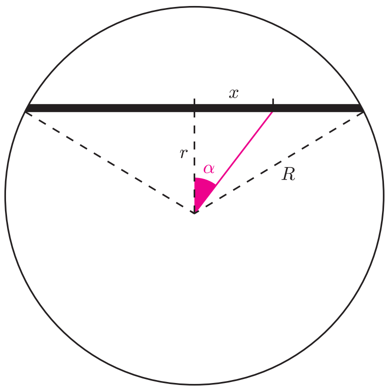
Kluczowa okazuje się funkcja:

$$\Delta(n) = \widetilde{p}_{\text{odd}}(n) - \widetilde{p}_{\text{even}}(n).$$

Funkcje $p(n)$, $\widetilde{p}(n)$ są bardzo skomplikowane, natomiast zadziwiające jest, że funkcja $\Delta(n)$ ma bardzo prostą strukturę. Początkowe wartości to:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\Delta(n)$	1	1	0	0	−1	0	−1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

Rozwiązanie zadania F 826.
Sytuacja opisana w zadaniu przedstawiona jest na poniższym schemacie.



Dla czytelności schemat ten przesadnie ukazuje położenie tunelu względem krzywizny Ziemi. W rzeczywistości odległość między Deltą i Albionem nie przekracza 100 km. Oznacza to, że kąt α przyjmuje wartości bardzo bliskie zeru. Uzasadnia to przybliżenie

$$r/R = \cos\alpha_{\max} \approx 1$$

oraz

$$x = r \cdot \operatorname{tg}\alpha \approx R\alpha.$$

Przyspieszenie wagonów jest zatem równe iloczynowi promienia Ziemi R i ich przyspieszenia kątowego ε względem środka Ziemi. Składowa siły grawitacji wzdłuż tunelu $F_{g,w}$ wyraża się wzorem $F_{g,w} = F_g \sin\alpha \approx F_g\alpha$, gdzie F_g jest całkowitą siłą grawitacji działającą na wagon. Dla wagonu o masie m mamy więc

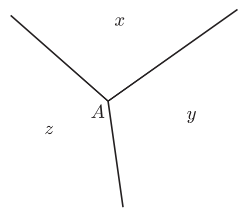
$$mR\varepsilon + mg\alpha = 0.$$

Równanie to jest identyczne z równaniem ruchu dla wahadła matematycznego o długości R, wagonik będzie więc wykonywał ruch okresowy o okresie $T = 2\pi\sqrt{R/g}$. Podróż z Delty do Albionu zajmuje pół okresu, zatem szukany czas jest równy $\frac{1}{2}T = \pi\sqrt{R/g}$. Podstawiając wartości liczbowe, uzyskujemy czas przejazdu równy 42 minuty, niezależny od odległości między Deltą i Albionem.

[*]Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Euler odkrył dwie istotne (dla obliczania $p(n)$) własności funkcji Δ:

Rozwiązanie zadania M 1376.
Skoro w wierzchołku A spotykają się trzy krawędzie, to w tym wierzchołku spotykają się też trzy ściany. Oznaczmy je jak na rysunku.



Weźmy punkt przecięcia prostej ℓ_x z płaszczyzną symetralną odcinka AC (przyjmujemy definicje i oznaczenia z rozwiązania zadania M 1375). Zauważmy, że należy on też do prostej ℓ_y. Istotnie, należy do płaszczyzny symetralnej AB, bo prosta ℓ_x jest w niej zawarta, i do płaszczyzny symetralnej AC. Przecięcie tych płaszczyzn to właśnie prosta ℓ_y. Podobnie, należy on do prostej ℓ_z. Jest więc równo odległy od wszystkich wierzchołków ścian x, y, z.

Własność 1. $p(n)$ spełnia rekurencję:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta(k) \cdot p(n-k). \tag{1}$$

Własność 2. Jak widać z początkowych wartości, $\Delta(k)$ jest ciągiem *rzadkim* (bardzo dużo zer). Jest on łatwo obliczalny za pomocą tzw. liczb pentagonalnych. Wartości tego ciągu to zera, $+1$ lub -1.

Z tego, że ciąg $\Delta(n)$ jest bardzo rzadki, wyniknie, iż przy obliczaniu $p(n)$ tylko $O(\sqrt{n})$ składników sumy (1) jest niezerowych.

Zatem $p(n)$ wyznaczamy w czasie $O(\sqrt{n})$, znając $p(n-1), p(n-2), \ldots, p(0)$. W sumie mamy algorytm działający w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$, o ile potrafimy łatwo wypisywać niezerowe wartości $\Delta(k)$.

Euler najpierw odkrył własności Δ heurystycznie, a dopiero po 10 latach znalazł dowód (być może wcześniej nie miał czasu).

Zdefiniujmy liczby pentagonalne (pięciokątne)

$$pent(i) = (3i-1)i/2.$$

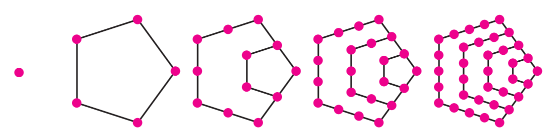
Nazwa pochodzi od interpretacji geometrycznej, podobnie jak dla liczb trójkątnych. Mamy:

$$pent(i) = pent(i-1) + 3i - 2.$$

Liczby pentagonalne będziemy również nazywać liczbami trapezowymi pierwszego typu, a liczby $pent(i) + i$ liczbami trapezowymi drugiego typu, patrz górny/dolny trapez na rysunku 1 (str. 8).

Oto kilka liczb pięciokątnych:

i	1	2	3	4	5	6	7
$pent(i)$	1	5	12	22	35	51	70



1 5 12 22 35

Ponadto zdefiniujmy współczynniki pentagonalne:

$$e(k) = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{jeśli } k = pent(i) \text{ lub } k = pent(i) + i, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{2}$$

Lemat kluczowy.

$$\Delta(k) = e(k). \tag{3}$$

Rozwiązanie zadania F 825.
W rozważanej w zadaniu sytuacji stosujemy wyidealizowany opis polegający na przyjęciu, że podłoże jest powierzchnią nieskończenie ciężkiego ciała. Jeśli natomiast przyjmiemy, że ciało, od którego odbija się piłeczka, ma masę M, to zasadę zachowania pędu i energii dla ruchu jednowymiarowego przy założeniu, że ciężkie ciało początkowo spoczywa, możemy zapisać jako:

$$mv = mv_1 + Mv_2,$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$

gdzie v_1 i v_2 są odpowiednio prędkościami piłeczki i ciężkiego ciała tuż po odbiciu. Są one równe

$$v_1 = -\frac{M-m}{M+m}v$$

oraz

$$v_2 = \frac{2m}{M+m}v,$$

a zatem dla $M \gg m$ rzeczywiście mamy $v_1 \approx -v$ oraz $v_2 \approx 0$.

Możemy teraz zapisać algorytm (jedną iterację) wyznaczania $p(n)$ następująco:

$$p(n) = \sum_{i \geqslant 1} (-1)^{i+1} \cdot (p(n - pent(i)) + p(n - pent(i) - i)). \tag{4}$$

W równaniu tym korzystamy jedynie z wartości i takich, że $pent(i) \leqslant n$, mamy jedynie $O(\sqrt{n})$ takich wartości i możemy je wszystkie łatwo obliczyć.

Twierdzenie. *Liczby $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ możemy obliczyć w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.*

Dowód równania (1)

Uzasadnienie jest sprytną manipulacją algebraiczną, korzystającą z tego, że dwa wielomiany będące tą samą funkcją mają takie same współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej. Sztuczka polega na tym, żeby te same wielomiany przedstawić na dwa różne sposoby, z jednego wymnożenia otrzymujemy wynik, który przyrównujemy do wymnożenia w innej formie. Zdefiniujmy:

$$\phi(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n), \qquad \psi(x) = 1 - x$$

oraz

$$W_1(x) = \prod_{i=1}^{n} \phi(x^i), \qquad W_2(x) = \prod_{i=1}^{n} \psi(x^i).$$

Wprowadźmy notację $\stackrel{n}{=}$ dla równości wielomianów z dokładnością do potęg wyższych niż n – inaczej mówiąc, bierzemy resztę z dzielenia przez x^{n+1}. Zauważmy, że zachodzi dosyć łatwe równanie:

$$W_1(x) \cdot W_2(x) \stackrel{n}{=} 1. \tag{5}$$

Na przykład dla $n = 1$ mamy $W_1(x) = 1 + x$, $W_2(x) = 1 - x$ oraz

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 \stackrel{n}{=} 1.$$

Przedstawimy teraz te same wielomiany w innej formie, po wymnożeniu czynników $\phi(x^i)$ i $\psi(x^i)$:

$$\begin{aligned} W_1(x) &\stackrel{n}{=} p(0)x^0 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + \ldots + p(n)x^n, \\ W_2(x) &\stackrel{n}{=} 1 - \Delta(1)x^1 - \Delta(2)x^2 - \ldots - \Delta(n)x^n. \end{aligned} \tag{6}$$

Aby uzasadnić powyższe równości, zauważmy, że przy wymnażaniu czynników $\phi(x^i)$ w $W_1(x)$ na wszystkie możliwe sposoby wybieramy z każdego z nich po jednym jednomianie. Każdy taki wybór, w którym iloczyn wybranych jednomianów to x^k dla $k \leqslant n$, odpowiada podziałowi liczby k, a jednomian wybrany w $\phi(x^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, oznacza, ile wystąpień składnika i znajduje się w tym podziale. Podobnie sytuacja wygląda w przypadku $W_2(x)$ i czynników $\psi(x^i)$; tutaj jednak dochodzi jeszcze znak jednomianu, wskazujący na parzystość liczby części w odpowiadającym mu podziale.

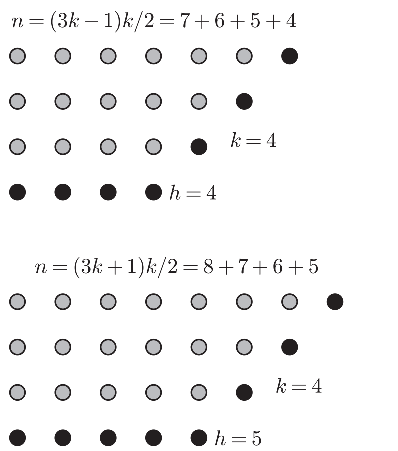
Z równania (5) dla $n \geqslant 1$ wynika, że współczynnik przy x^n w iloczynie $W_1(x) \cdot W_2(x)$ wynosi zero. Korzystając z własności (6), możemy ten współczynnik przedstawić jako kombinację iloczynów $p(i), \Delta(j)$, gdzie $i + j = n$, w rezultacie otrzymujemy:

$$p(n) \cdot 1 - p(n-1) \cdot \Delta(1) - p(n-2) \cdot \Delta(2) - p(n-3) \cdot \Delta(3) - \ldots - \Delta(n) \cdot p(0) = 0.$$

Stąd bezpośrednio wynika równanie (1).

Dowód lematu kluczowego (równania (3))

W sekcji tej rozważamy tylko podziały na różne części. Dowód lematu kluczowego wymaga wprowadzenia interpretacji geometrycznej podziałów.



Rys. 1. Trapezy rzędu k dla $k = 4$. Trapez pierwszego typu ma $pent(k)$ elementów, a drugiego typu ma $pent(k) + k$ elementów. Podziały odpowiadające tego typu trapezom nazywamy podziałami trapezowymi.

Podział liczby może zostać przedstawiony w postaci diagramu zwanego diagramem Ferrersa. Liczby elementów w poszczególnych wierszach diagramu odpowiadają poszczególnym składnikom λ_j. Diagramy Ferrersa dla przykładowych podziałów liczb 22 i 26 są przedstawione na rysunku 1. Są to bardzo szczególne podziały, które będziemy nazywać trapezowymi.

Podział trapezowy rzędu k pierwszego typu jest postaci

$$(k + k - 1, k + k - 2, k + k - 3, \ldots, k),$$

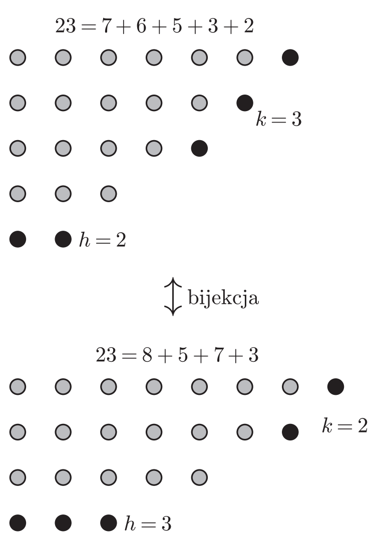
a drugiego typu – postaci

$$(k + k, k + k - 1, k + k - 2, \ldots, k + 1).$$

Obserwacja. Podział trapezowy mający $pent(k)$ lub $pent(k) + k$ elementów składa się z k części.

Liczbę n nazywamy liczbą trapezową, gdy istnieje podział n będący podziałem trapezowym. Dla danego n jest zawsze co najwyżej jeden taki podział. Liczby trapezowe są postaci $pent(j)$ lub $pent(j) + j$.

Dla diagramu π (niekoniecznie trapezowego) przez $k(\pi)$ oznaczmy liczbę elementów na prawej diagonali, poczynając od prawego górnego elementu. Jeśli odpowiadającym podziałem jest $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, to $k(\pi)$ jest największą liczbą naturalną, taką że $\lambda_i - 1 = \lambda_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k(\pi) - 1$. Przez $h(\pi) = \lambda_r$ oznaczmy długość najkrótszego wiersza diagramu.



Rys. 2. Działanie funkcji F.

Jeśli podział π nie jest trapezowy oraz $h(\pi) \leqslant k(\pi)$, to $F(\pi)$ definiujemy jako podział powstający z π poprzez dodanie do każdego z pierwszych $h(\pi)$ wierszy po jednym elemencie i usunięcie najkrótszego (dolnego) wiersza, patrz rysunek 2.

Podziały o parzystej/nieparzystej liczbie części nazywamy parzystymi/nieparzystymi. Zauważmy, że funkcja F zmienia parzystość podziału.

$14+1 \leftrightarrow 15$
$13+2 \leftrightarrow 12+2+1$
$12+3 \leftrightarrow 11+2+1$
$11+4 \leftrightarrow 10+4+1$
$10+5 \leftrightarrow 9+5+1$
$9+6 \leftrightarrow 8+6+1$
$8+7 \leftrightarrow 7+6+2$
$7+5+2+1 \leftrightarrow 8+5+2$
$7+4+3+1 \leftrightarrow 8+4+3$
$9+3+2+1 \leftrightarrow 10+3+2$
$8+4+2+1 \leftrightarrow 9+4+2$
$6+5+3+1 \leftrightarrow 7+5+3$
$6+4+3+2 \leftrightarrow 5+4+3+2+1$
$6+5+4$ podział trapezowy

Rys. 3. Zgrupowanie podziałów nietrapezowych liczby $n=15$ zgodnie z działaniem funkcji F.

Zachodzi następujący, dosyć oczywisty fakt.

Własność funkcji F. Funkcja F jest bijekcją między nietrapezowymi podziałami n z $h(\pi) \leqslant k(\pi)$ i nietrapezowymi podziałami n z $h(\pi) > k(\pi)$.

Na mocy tej własności otrzymujemy:

$$\widetilde{p}_{\mathrm{odd}}(n) - \widetilde{p}_{\mathrm{even}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzystą liczbą trapezową,} \\ -1 & \text{gdy } n \text{ jest parzystą liczbą trapezową,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{7}$$

Stąd:

$$\widetilde{p}_{\mathrm{odd}}(n) - \widetilde{p}_{\mathrm{even}}(n) = e(n) \quad \text{dla każdego } n.$$

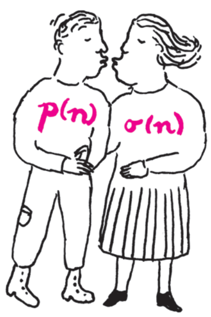
Nieoczekiwana relacja między funkcjami $p(n)$ i $\sigma(n)$

Jako ciekawostkę podamy, bez uzasadnienia, pewien związek dwóch pozornie odległych funkcji $p(n)$ i $\sigma(n)$, przy czym $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników liczby n (włącznie z n). Mamy

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24

Dla funkcji σ zachodzi prawie taka sama rekurencja jak dla $p(n)$, jedyna różnica to zastąpienie $p(0)$ przez n we wzorze (1):

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(k) \cdot \sigma(n-k) + \Delta(n) \cdot n. \tag{8}$$



Przykład. Dla $n = 15$ mamy:

$$\begin{aligned} \sigma(15) &= \sigma(15-1) + \sigma(15-2) - \sigma(15-5) - \sigma(15-7) + \sigma(15-12) + 15 = \\ &= 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24, \\ p(15) &= p(15-1) + p(15-2) - p(15-5) - p(15-7) + p(15-12) + p(0) = \\ &= 135 + 101 - 42 - 22 + 3 + 1 = 176. \end{aligned}$$

Korzystając ze związku liczb $\Delta(k)$ z liczbami pentagonalnymi, wszystkie wartości $\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots, \sigma(1)$ można obliczyć, tak jak poprzednio, w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$. Zachodzi również inny zadziwiający związek:

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \Delta(k) \cdot p(n-k). \tag{9}$$

Jeśli $n = \prod p_i^{m_i}$ jest rozkładem n na czynniki pierwsze, to

$$\sigma(n) = \prod (p_i^{m_i+1} - 1) / \prod (p_i - 1).$$

Wydaje się, że wyznaczanie σ dla wszystkich liczb $1, 2, \ldots, n$ za pomocą wzoru (8) i liczb pentagonalnych jest jednak wygodniejsze niż przy zastosowaniu ostatniego wzoru.

Australijski matematyk Kurt Mahler wykazał, że liczba

0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940...

(każdy wie, jak dalej)

nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Liczby takie stanowią większość liczb rzeczywistych, ale na odkrycie pierwszej takiej liczby czekano aż do 1844 roku (Joseph Liouville). To, że liczba π też jest taka, udało się wykazać dopiero w 1882 roku Ferdinandowi Lindemannowi.

M. K.