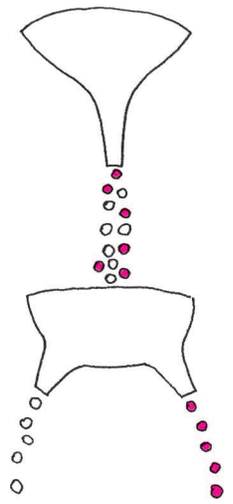
Największy wspólny dzielnik

Tomasz KOCIUMAKA[*]



Podobnie jak wyznaczanie liczb pierwszych, problem znajdowania największego wspólnego dzielnika (NWD) dwóch liczb naturalnych ma klasyczne i zapewne wszystkim Czytelnikom znane rozwiązanie. Mowa oczywiście o algorytmie Euklidesa, jednym z najstarszych do dziś używanych algorytmów. Jest to rozwiązanie bardzo proste w implementacji, a w wersji z dzieleniem – efektywne: pozwala wyznaczyć NWD dwóch liczb nie większych niż n w czasie $O(\log n)$. W pewnych przypadkach istnieją jednak rozwiązania asymptotycznie szybsze.

Załóżmy, że chcemy wyznaczać największy wspólny dzielnik dla wielu par stosunkowo niewielkich liczb. A konkretnie – dla q par liczb całkowitych dodatnich nieprzekraczających n. Stosując algorytm Euklidesa, otrzymujemy oczywiście algorytm o złożoności czasowej $O(q \log n)$. Możemy także spamiętać w dużej tablicy odpowiedzi na wszystkie możliwe n^2 zapytań. Wówczas przy pierwszym podejściu możemy otrzymać złożoność $O(n^2 \log n + q)$, gdy dla każdej możliwej pary zastosujemy niezależnie algorytm Euklidesa. Bez problemów takie rozwiązanie możemy przyspieszyć do $O(n^2 + q)$, ponieważ pojedynczy krok algorytmu Euklidesa sprowadza wyznaczanie NWD dla pary (i, j) do problemu obliczenia NWD dla pewnej pary leksykograficznie mniejszej. Możemy zatem wypełniać tablicę w odpowiedniej kolejności i w każdym kroku przepisywać wynik ze wskazanej komórki. W praktyce lepiej w tej sytuacji korzystać z algorytmu Euklidesa w wersji z odejmowaniem, gdyż procesory wykonują je istotnie szybciej niż wyznaczanie reszty z dzielenia. Otrzymujemy w ten sposób następujący algorytm:

Algorytm *tablicuj-nwd*(n)
  for $i := 1$ **to** n **do**
    $nwd[i, i] := i$;
  for $i := 1$ **to** n **do**
    for $j := 1$ **to** $i - 1$ **do**
      $nwd[j, i] := nwd[i, j] := nwd[j, i - j]$;

Czas obliczeń wstępnych rzędu $O(n^2)$ jest jednak mało satysfakcjonujący – dopiero przy $\Omega(n^2/\log n)$ zapytaniach podejście korzystające z algorytmu Euklidesa przestaje osiągać lepsze wyniki.

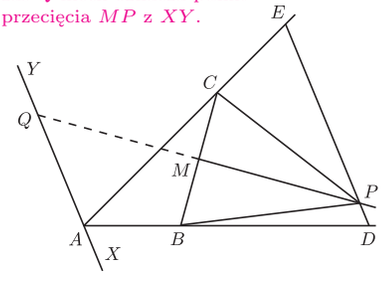
Spróbujmy odnieść pewne korzyści już z obliczeń wstępnych rzędu $O(n)$. Jak przekonaliśmy się w poprzednim artykule, w tym czasie można wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze nieprzekraczające n. Zaprezentowany tam algorytm jest jednak znacznie silniejszy – dla każdej liczby k oblicza jej najmniejszy dzielnik pierwszy (oznaczany tu przez $ndp[k]$) oraz największą potęgę tego $ndp[k]$ dzielącą k. Za ich pomocą można łatwo skonstruować algorytm znajdowania NWD, działający w czasie proporcjonalnym do liczby różnych dzielników pierwszych argumentów. Pesymistycznie wielkość ta wynosi $O(\frac{\log n}{\log \log n})$, więc zapytania obsługiwane są niewiele szybciej niż przez algorytm Euklidesa. Okazuje się jednak, że przy liniowych obliczeniach wstępnych można osiągnąć stały czas zapytania!

Na wstępie zauważmy, że jeśli jeden z argumentów jest liczbą pierwszą, obliczenie NWD jest bardzo łatwe. Również łatwo możemy wyznaczać NWD liczb mniejszych niż $\sqrt{n}$: jeśli mamy do dyspozycji czas $O(n)$ na obliczenia wstępne, można spamiętać wszystkie wartości NWD, wywołując *tablicuj-nwd*$(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$. Jak się wkrótce przekonamy, dowolne zapytanie o NWD można sprowadzić do stałej liczby zapytań, w których każdy z argumentów jest liczbą pierwszą lub nie przekracza $\sqrt{n}$. Kluczowe jest tu pojęcie *rozkładu specjalnego*.

Definicja. *Rozkładem specjalnym* dodatniej liczby całkowitej k nazwiemy trójkę liczb całkowitych (k_1, k_2, k_3), dla której $k_1 k_2 k_3 = k$ oraz dla każdego i:

$$k_i \leqslant \sqrt{k} \quad \text{lub} \quad k_i \text{ jest liczbą pierwszą.}$$

Rozwiązanie zadania M 1372.
Poprowadźmy prostą XY przechodzącą przez punkt A i równoległą do DE. Niech M będzie środkiem BC, zaś Q niech oznacza punkt przecięcia MP z XY.



Skoro punkt M jest środkiem BC, jego odległość od prostej DE to średnia arytmetyczna odległości punktów B i C od DE. Jest ona równa średniej arytmetycznej odległości tych punktów od XY, ponieważ $AB/BD = CE/CA$ i $XY \parallel DE$. Zatem M jest równo odległy od DE i XY, skąd $MQ = MP$ oraz $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BPC$.

Niech Q' będzie takim punktem na półprostej MQ, że $\sphericalangle BQ'C = \sphericalangle BAC$. Z podobieństwa trójkątów równoramiennych DAE i $BQ'C$ mamy $\sphericalangle ADE = \sphericalangle Q'CB$. Zatem skoro na czworokącie $BAQ'C$ można opisać okrąg, to

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAQ' &= 180^\circ - \sphericalangle Q'CB = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle ADE = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle DAX = \sphericalangle BAQ.\end{aligned}$$

Wobec tego $Q = Q'$, co daje tezę.

[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Przykładowo, jednym z rozkładów specjalnych liczby 156 jest $(2, 6, 13)$, liczby 175 jest $(5, 5, 7)$, a liczby 1 jest $(1, 1, 1)$.

Następujący lemat stanowi podstawę indukcyjnego dowodu faktu, że każda dodatnia liczba całkowita ma rozkład specjalny. Ten dowód można natychmiast przekształcić w algorytm wyznaczający rozkłady specjalne wszystkich liczb od 1 do n w czasie liniowym na podstawie tablicy *ndp*.

Lemat. *Niech $l > 1$ będzie liczbą całkowitą, $p = ndp[l]$ oraz $k = l/p$. Niech (k_1, k_2, k_3) będzie rozkładem specjalnym k, dla którego $k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$. Wówczas $(k_1 \cdot p, k_2, k_3)$ jest rozkładem specjalnym l.*

Dowód. Na początek zauważmy, że liczby k_2 i k_3 są pierwsze lub nie większe niż $\sqrt{k}$, więc są pierwsze lub nie większe niż $\sqrt{l}$. Musimy wobec tego zająć się tylko liczbą $k_1 \cdot p$. Jeśli $k_1 = 1$, to oczywiście $k_1 \cdot p = ndp[l]$ jest liczbą pierwszą. Załóżmy więc, że $k_1 > 1$. Ponieważ k_1 jest dzielnikiem l, a p jest najmniejszym (różnym od 1) dzielnikiem l, więc $p \leqslant k_1$. Wobec tego

$$(k_1 p)^2 = k_1^2 p^2 \leqslant p k_1^3 \leqslant p k_1 k_2 k_3 = pk = l,$$

a więc $k_1 p \leqslant \sqrt{l}$, co kończy dowód. □

Pozostaje nam jeszcze wykorzystać rozkłady specjalne do efektywnego obliczania NWD. Tym razem najpierw przedstawimy algorytm, a potem zastanowimy się nad jego poprawnością. Przyjmiemy, że rozkłady specjalne zapamiętaliśmy w tablicy *rozklad*.

Algorytm *nwd*(k, l)
  $(x_1, x_2, x_3) := rozklad[k]$;
  $(y_1, y_2, y_3) := rozklad[l]$;
  $g := 1$;
  foreach $i, j \in \{1, 2, 3\}$ **do**
    if $\max(x_i, y_j) \leqslant \sqrt{n}$ **then**
      $d := nwd[x_i, y_j]$;
    else if $x_i = y_j$ **then** $d := x_i$;
    else $d := 1$;
    $g := g \cdot d$;
    $x_i := x_i/d$; $y_j := y_j/d$;
  return g;

Na początek zauważmy, że w każdym obrocie pętli d jest *pewnym* wspólnym dzielnikiem x_i oraz y_j. Co więcej, d jest *największym* wspólnym dzielnikiem x_i oraz y_j. Jeśli $x_i, y_j \leqslant \sqrt{n}$ lub $x_i = y_j$, nie mamy co do tego wątpliwości. Bez straty ogólności niech więc $x_i < y_j$ oraz $\sqrt{n} < y_j$. Wówczas y_j jest liczbą pierwszą, a więc $nwd(x_i, y_j)$ może być równe 1 lub y_j. Drugą możliwość natychmiast wyklucza nierówność $x_i < y_j$.

Pozostaje teraz wykazać, że $g = nwd(k, l)$. Zrobimy to przez wskazanie niezmienników pętli:

- $k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot g$,
- $l = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot g$,
- $nwd(x_i, y_j) = 1$ dla już przetworzonych par i, j.

Na ich podstawie wnioskujemy, że po ostatnim obrocie pętli g jest wspólnym dzielnikiem k i l, a liczby k/g i l/g są względnie pierwsze.

W ten sposób skonstruowaliśmy algorytm, który na q zapytań o NWD liczb z zakresu $1, \ldots, n$ odpowiada w czasie $O(n + q)$. O ile tylko $q > \frac{n}{\log n}$, to ten algorytm jest najlepszy z tutaj przedstawionych. Okazuje się, że w pewien sposób można połączyć jego siły z algorytmem Euklidesa i otrzymać rozwiązanie, które nigdy nie jest asymptotycznie wolniejsze od żadnego z zaprezentowanych, a dla pewnych wartości q (np. $q = \frac{n}{\log n}$) jest niemal $\log n$ razy szybsze. Stworzenie tego działającego w czasie $O\left(q \cdot \max\left(1, \log \frac{n}{q}\right)\right)$ algorytmu pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie.

Rozwiązanie zadania M 1374.
Zauważmy najpierw, że dla liczby całkowitej x zachodzi $3 \mid x^{2013} - x$. Stąd

$$L = 1^{2013} + 2^{2013} + \ldots + (p-1)^{2013} \equiv$$
$$\equiv 1 + 2 + \ldots + (p-1) \pmod 3.$$

Jeśli więc p jest postaci $3k + 1$, to wówczas

$$L \equiv (1 + 2) + 3 + \ldots + (3k - 2 + 3k - 1) + 3k \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod 3,$$

zaś $p^{2013} \equiv p \equiv 1 \pmod 3$, więc równanie nie ma rozwiązania w tym przypadku. Podobnie stwierdzamy, że dla p postaci $3k + 2$ równanie jest sprzeczne. Zatem jedyna możliwość to $p = 3$, ale łatwo sprawdzić, że wtedy równanie również jest sprzeczne.

Uwaga. Paul Erdős około 1950 roku w liście do Leo Mosera postawił hipotezę, że równanie

$$1^k + 2^k + \ldots + (m-1)^k = m^k$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m oraz $k \geqslant 2$. Dziś wiadomo, że jeśli równanie ma rozwiązanie dla jakiegoś $k \geqslant 2$, to $m > 10^{10^9}$ (zgrabny dowód i historia problemu są przedstawione w artykule: P. Moore, *A top hat for Moser's four mathemagical rabbits*, Amer. Math. Monthly 118 (2011), 364–370).