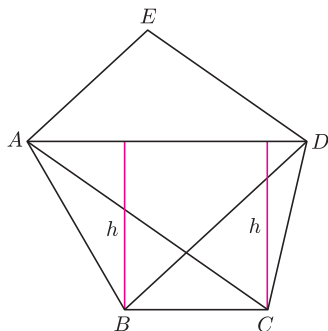




Rozwiązanie zadania M 1315.
Trójkąty ABD i CDA mają równe pola oraz wspólny bok AD .



Wobec tego wysokości tych trójkątów poprowadzone do boku AD są równe. Ponadto punkty B i C leżą po tej samej stronie prostej AD . Stąd wniosek, że przekątna AD jest równoległa do boku BC . Analogicznie dowodzimy, że pozostałe cztery przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równoległe do odpowiednich jego boków.



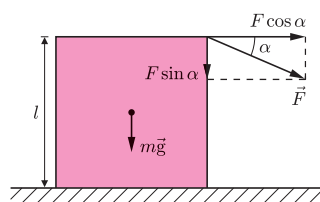
Rozwiązanie zadania F 790.
Poślizg nie nastąpi, gdy będzie

$$F \cos \alpha \leq k(F \sin \alpha + mg).$$

Obrót zaś nastąpi, jeśli

$$Fl \cos \alpha \geq \frac{1}{2}mgl,$$

przy czym ramię siły ciężkości wynosi $l/2$, a ramię siły F jest równe $l \cos \alpha$.



Z powyższych nierówności wynika, że

$$\tan \alpha = \frac{1-2k}{k},$$

$$F_{\min} = \frac{mg}{2k} \sqrt{(2k-1)^2 + k^2} \quad \text{dla } k < \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 0, \quad F_{\min} = \frac{mg}{2} \quad \text{dla } k > \frac{1}{2}.$$

Informatyczny kącik olimpijski (42): Przepływ w sieci

Jednym z zadań, które zostały postawione przed uczestnikami akademickich drużynowych zawodów programistycznych ACM ICPC Dhaka Regional Contest 2010, było zadanie o nieco mylącym tytule *Network Flow* (*Przepływ w sieci*).

Trochę zagmatwaną treść zadania można streścić w następujący sposób: mamy dany n -wierzchołkowy graf nieskierowany G , w którym każdy z wierzchołków utożsamiamy z pewnym, zadanym punktem na płaszczyźnie. Stopień każdego wierzchołka (czyli liczba krawędzi z nim incydentnych) to 2 lub 4. Naszym zadaniem jest znaleźć taki cykl Eulera w G (tj. cykl, który przechodzi każdą krawędzią dokładnie raz), którego koszt jest minimalny. Kosztem cyklu nazywamy sumę kątów pomiędzy każdą parą kolejnych krawędzi cyklu, przy czym interesują nas najmniejsze kąty pomiędzy prostymi zawierającymi pary kolejnych krawędzi.

Najprostszym rozwiązaniem jest przejrzanie wszystkich możliwości połączeń par krawędzi w każdym wierzchołku stopnia 4. Dla każdego układu połączeń sprawdzamy, czy tworzy on cykl Eulera, a jeśli tak, to obliczamy jego koszt. Niestety, takie rozwiązanie ma złożoność czasową $O(3^n)$.

Tak od razu nie widać metody na szybkie znalezienie najtańszego cyklu Eulera, podejźmy zatem do problemu od innej strony. Możemy, na przykład, spróbować stworzyć jakikolwiek cykl Eulera, a później stopniowo zmniejszać jego sumaryczny koszt. Autor tego kącika nie ma jednak pomysłu na szybkie rozwiązanie problemu tym sposobem.

Podejście odwrotne daje natomiast rezultaty. Spróbujmy utworzyć ze wszystkich krawędzi grafu G możliwie najtańszy *zbiór* cykli, a później najmniejszym kosztem pozmieniać połączenia w poszczególnych wierzchołkach tak, by powstał cykl Eulera. Na początku w każdym wierzchołku stopnia 4 łączymy krawędzie w pary tak, aby suma kosztów była jak najmniejsza. W ten sposób otrzymujemy zbiór cykli C o minimalnym możliwym koszcie. Zauważmy teraz, że jeśli dwa cykle A i B z tego zbioru przechodzą przez ten sam wierzchołek v , to – poprzez dowolną zamianę połączeń w wierzchołku v na inne – łączymy te dwa cykle w jeden. Oznaczmy minimalny koszt takiej zmiany w wierzchołku v przez z_v . Jeśli zaś zmienimy połączenia w wierzchołku, który należy do jednego cyklu (przy czym cykl przechodzi przez niego dwukrotnie), to albo nic się nie zmieni, albo podzielimy tenże cykl na dwa.

Stwórzmy teraz nowy multigraf H , w którym wierzchołkami są cykle ze zbioru C , a krawędziami wierzchołki stopnia 4 z G – przez każdy taki wierzchołek przechodzą wszakże dokładnie dwa cykle (niekoniecznie różne). Kosztem krawędzi odpowiadającej wierzchołkowi v z G niech będzie z_v . Szukamy najtańszego sposobu połączenia wszystkich cykli w jeden, ale w multigrafie H odpowiada to szukaniu zbioru krawędzi o minimalnym koszcie łączącego wszystkie wierzchołki. Jest to zatem problem wyznaczenia najtańszego drzewa rozpinającego w H . Zauważmy, że gdyby krawędzie H mogły mieć ujemne koszty, to takie rozwiązanie nie działałoby, gdyż, być może, opłacałoby się wybrać, poza drzewem rozpinającym, jeszcze trochę krawędzi z H , które zmniejszyłyby koszt. U nas jednak $z_v \geq 0$ dla każdego wierzchołka v z G .

Znanych jest kilka efektywnych algorytmów znajdujących minimalne drzewo rozpinające, np. algorytmy Kruskala i Prima, działające dla grafu $H = (V, E)$ w czasie $O(|E| \log |V|)$. Całe rozwiązanie zadania wymaga zbudowania grafu H (koszt liniowy), a następnie znalezienia minimalnego drzewa rozpinającego w H , co możemy wykonać w czasie $O(n \log n)$.

Takie rozwiązanie w żaden sposób nie korzysta ze specyfiki danych wejściowych, w szczególności z geometrycznych własności grafu oraz sposobu obliczania kosztów. Autor nie zna rozwiązania, które w istotny sposób korzystałoby z tych informacji, zachęca więc Czytelnika do próby znalezienia takowego.

Tomasz KULCZYŃSKI