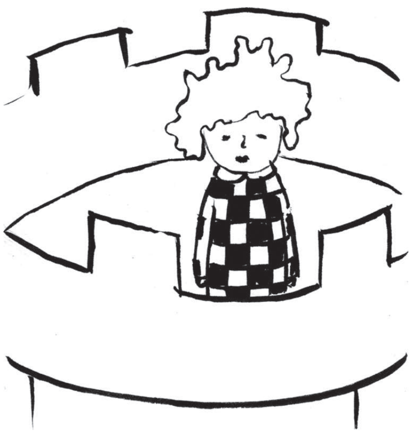
Informatyczny kącik olimpijski (39): Wieże

W tym kąciku zajmiemy się rozwiązaniem zadania pochodzącego z jednej z finałowych rund konkursu TopCoder Open 2010, o nazwie *Shrooks on the Board*.

Jesteśmy proszeni o obliczenie reszty z dzielenia liczby poprawnych ustawień wież na planszy przez zadaną liczbę pierwszą P. Plansza jest prostokątna, ma H wierszy oraz W kolumn. W tym zadaniu wieże są nietypowe: atakują jedynie pola znajdujące się w tym samym wierszu i do tego odległe o co najwyżej K pól. Poprawne ustawienie to takie, które zawiera co najmniej jedną wieżę i żadna wieża nie atakuje innej.



Zauważmy na początek, że istnieje dokładnie jedno ustawienie, które nie zawiera wież. Będziemy uznawali je za poprawne, a na końcu wynik zmniejszymy o 1. Możemy więc ustawić dowolną liczbę wież w dowolny sposób, byle się nie atakowały. Od tej pory problemy dla poszczególnych wierszy są niezależne. Łatwo zauważyć, że jeżeli wieże w jednym wierszu można ustawić na X_W sposobów, to ostatecznym wynikiem będzie reszta z dzielenia liczby $(X_W)^H - 1$ przez P. Do obliczenia tejże reszty wystarczy znać resztę z dzielenia liczby X_W przez P; koszt czasowy końcowego potęgowania to $O(\log H)$.

Cały problem polega więc na wyznaczeniu wartości X_W. Spróbujmy najpierw wyprowadzić wzór rekurencyjny na X_n. Mamy następujące możliwości: albo pierwsze pole jest puste, a dalsza część planszy jest jakoś zapełniona wieżami, co daje X_{n-1} poprawnych ustawień, albo też na pierwszym polu stoi wieża, kolejne K pól jest pustych, a pozostałe są jakoś zapełnione, co daje dodatkowe X_{n-K-1} ustawień. Ostatecznie mamy, że $X_n = X_{n-1} + X_{n-K-1}$. Pozostaje zaznaczyć, iż dla $n \leqslant 0$ przyjmujemy $X_n = 1$. Daje to prosty algorytm obliczający X_W w czasie $O(W)$.

Inne rozwiązanie otrzymujemy, stosując standardową metodę obliczania wyrazów ciągu zadanego wzorem rekurencyjnym za pomocą szybkiego potęgowania macierzy, patrz artykuł *Macierze oczami informatyka* w *Delcie* 7/2009. Przypomnijmy tylko, że w metodzie tej przedstawiamy taki oto wektor

$$\begin{pmatrix} X_n \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ X_{n-K} \end{pmatrix}$$

jako iloczyn pewnej macierzy A rozmiaru $(K+1)\times(K+1)$ i analogicznego wektora zapisanego dla $n-1$. Wówczas zadanie sprowadza się do obliczenia macierzy A^W, co możemy wykonać w czasie $O(K^3 \log W)$.

Spróbujmy teraz podejść do problemu od innej strony. Pokażemy, że sposobów ustawienia ℓ wież w wierszu długości W jest tyle samo, co wyborów ℓ elementów spośród $W-(\ell-1)\cdot K$ elementów. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że wieża zajmuje swoje pole oraz K pól na prawo od niego. W takim razie możemy skonstruować bijekcję między ustawieniami wież a wyborami elementów. Mając dane ustawienie wież, po prostu usuwamy K pól na prawo od każdej wieży poza ostatnią i otrzymujemy wybór ℓ pól spośród $W-(\ell-1)K$ pól. Odwrotnie, mając dany pewien wybór ℓ elementów spośród $W-(\ell-1)K$ elementów, ustawiamy wieże w polach odpowiadających tym elementom i po każdej (poza ostatnią) dokładamy dodatkowo K wolnych pól.

Żądanych ustawień wież jest zatem $\binom{W-\ell K+K}{\ell}$. Oczywiście, musi być $W-\ell K+K \geqslant \ell$, czyli

$$\ell \leqslant \frac{W+K}{K+1}.$$

Ostatecznie:

$$X_W = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{W+K}{K+1} \rfloor} \binom{W-\ell K+K}{\ell}.$$

Aby obliczyć resztę z dzielenia X_W przez P, wystarczy umieć szybko obliczać reszty z dzielenia symboli Newtona przez P. W tym celu korzystamy z twierdzenia Lucasa, które orzeka, że jeśli P jest liczbą pierwszą i $0 \leqslant b, d < P$, to $\binom{aP+b}{cP+d}$ daje taką samą resztę z dzielenia przez P co $\binom{a}{c}\binom{b}{d}$. Zauważmy teraz, że zarówno reszty z dzielenia liczb $0!, 1!, \ldots, (P-1)!$ przez P, jak i ich odwrotności modulo P, możemy obliczyć w czasie $O(P)$ – te drugie według wzorów

$$\mathrm{odwr}(k!) = (k+1)\cdot \mathrm{odwr}((k+1)!),$$

$$\mathrm{odwr}((P-1)!) = -1.$$

Wówczas resztę z dzielenia $\binom{b}{d}$ przez P obliczamy w czasie stałym, natomiast $\binom{a}{c}$ ponownie zapisujemy w postaci $\frac{a'P+b'}{c'P+d'}$ i zaczynamy od początku. W ten sposób symbol Newtona $\binom{n}{k}$ obliczamy w czasie $O(\log_P n)$. Możemy więc obliczyć X_W, wykonując $O\left(\frac{W}{K}\log_P(W+K)+P\right)$ operacji. Można śmiało powiedzieć, że jest to $O\left(\frac{W}{K}\log W + P\right)$ operacji, gdyż $P \geqslant 2$, a zadanie jest interesujące tylko dla $K \leqslant W$.

Żadne z powyższych rozwiązań nie jest jeszcze satysfakcjonujące. Aby uzyskać lepszy wynik, połączymy ostatnie dwa rozwiązania. Jeśli $K^4 \leqslant W$, to uruchamiamy rozwiązanie z mnożeniem macierzy, a w przeciwnym przypadku rozwiązanie przez symbole Newtona. Ostatecznie, całe zadanie rozwiązujemy w czasie $O(W^{\frac{3}{4}} \log W + \log H + P)$ przy zużyciu pamięci rzędu $O(P+\sqrt{W})$.

Tomasz KULCZYŃSKI