Rozwiązanie zadania M 1595.
a) Przypuśćmy, że w pewnym n-turnieju jest dokładnie dwóch mistrzów i oznaczmy ich przez A, B w taki sposób, że A wygrał z B.

Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem zawodników, którzy wygrali z A, a $\mathcal{B}$ – zbiorem zawodników, którzy przegrali z A. Skoro B jest mistrzem oraz $B \in \mathcal{B}$, to istnieje zawodnik pokonany przez B, który wygrał z A – wynika stąd w szczególności, że zbiór $\mathcal{C}$ jest niepusty.

Ograniczając turniej do meczów rozegranych między zawodnikami ze zbioru $\mathcal{C}$, możemy na mocy poprzedniego zadania wskazać zawodnika C, który jest mistrzem w zbiorze $\mathcal{C}$. Zawodnik C wygrał pośrednio lub bezpośrednio ze wszystkimi pozostałymi zawodnikami w $\mathcal{C}$ oraz wygrał bezpośrednio z A, więc wygrał pośrednio ze wszystkimi zawodnikami w $\mathcal{B}$. To oznacza, że C jest mistrzem w całym turnieju, co przeczy założeniu, że mistrzów jest dokładnie dwóch.

b) Rozważmy turniej, w którym A, B, C są takimi zawodnikami, że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A, a każdy z pozostałych $n-3$ zawodników przegrał z każdym spośród A, B, C (wyniki meczów pomiędzy tymi $n-3$ zawodnikami mogą być dowolne). W tym turnieju A, B, C są jedynymi mistrzami (nikt z pozostałych nie wygrał z żadnym z nich) i jest ich trzech.

Twierdzenie 6 (Hilbert, 1893)**.** *Niech wielomian $W \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą czterech kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, X_2)$.*

Naturalne jest pytanie, czy możemy wzmocnić to twierdzenie przez zapisanie dodatnio określonego wielomianu jako sumy trzech kwadratów funkcji wymiernych. Odpowiedź jest negatywna i z pomocą jako kontrprzykład ponownie przychodzi nam wielomian Motzkina – tym razem jednak uzasadnienie nie jest elementarne i korzysta z dziedziny zwanej geometrią algebraiczną.

Twierdzenie 7 (Cassels–Ellison–Pfister, 197)**.** *) Wielomian Motzkina nie jest sumą trzech kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, X_2)$.*

Okazuje się, że wielomian Motzkina nie jest w tym sensie wyjątkowy. Jean-Louis Colliot–Thélène pokazał w 1993 roku, że w zbiorze wielomianów stopnia co najmniej 6 te, które można przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów funkcji wymiernych, stanowią pomijalny zbiór zarówno z topologicznego, jak i teoriomiarowego punktu widzenia; szczegóły można znaleźć na przykład w artykule Oliviera Benoista: *Writing Positive Polynomials as Sums of (Few) Squares*.

Teraz wróćmy do liczby składników w przypadku dowolnej liczby zmiennych. O tym, jak można ją oszacować dla funkcji wymiernych n zmiennych, mówi poniższe twierdzenie Pfistera.

Twierdzenie 8 (Pfister, 1967)**.** *Niech wielomian $W \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą 2^n kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$.*

Nasuwa się kolejne pytanie: czy ograniczenie 2^n może zostać poprawione? Innymi słowy, czy istnieje nieujemnie określony wielomian z $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, który nie jest sumą $2^n - 1$ kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$? Dylemat ten został sformułowany przez Albrechta Pfistera zaraz po opublikowaniu dowodu, że liczba składników 2^n jest wystarczająca. Na chwilę obecną wiadomo jedynie, że $n+1$ to za mało. Jak widać, choć siedemnasty problem Hilberta został rozwiązany już w 1927 roku, to temat związany z tym zagadnieniem jest pełen kwestii nierozstrzygniętych. Do zrobienia wciąż pozostaje wiele, a zaprezentowane tutaj twierdzenia są tylko częścią większej układanki.

Lodowa maszyna cieplna

Krzysztof REJMER

Znane powiedzenie mówi, że istnieją dwie szkoły: otwocka oraz falenicka. Jedna na pewno jest lepsza, druga oczywiście gorsza; sęk w tym, że nie wiadomo, która jest jaka.

Rozwiązanie zadania M 1594.
Niech A będzie dowolnym zawodnikiem, który wygrał *najwięcej* meczów. Udowodnimy, że A jest mistrzem.

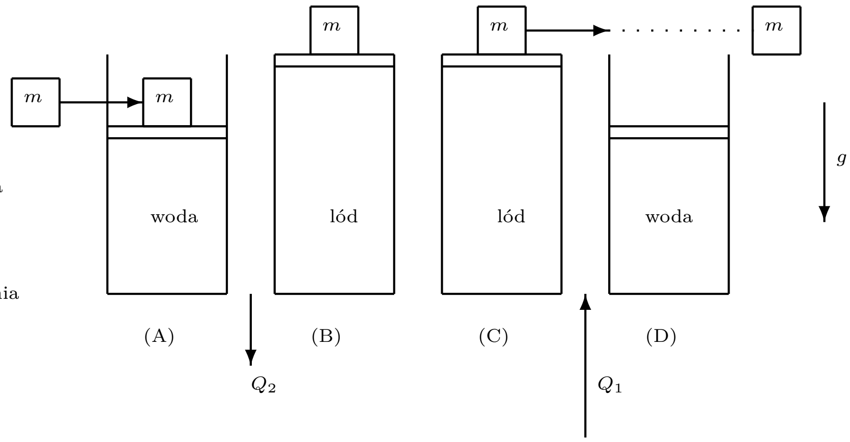
Oznaczmy przez $\mathcal{B}$ zbiór zawodników, którzy przegrali z A, a przez $\mathcal{C}$ zbiór zawodników, którzy wygrali z A. Jeżeli zbiór $\mathcal{C}$ jest pusty, to A wygrał ze wszystkimi bezpośrednio, więc jest mistrzem.

Przypuśćmy, że istnieje zawodnik $C \in \mathcal{C}$, który wygrał z każdym zawodnikiem z $\mathcal{B}$. Wówczas C wygrał ze wszystkimi zawodnikami pokonanymi przez A oraz z samym A, więc ma na koncie więcej zwycięstw niż A, a to przeczy wyborowi zawodnika A. Wobec tego dla każdego $C \in \mathcal{C}$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ o tej własności, że B wygrał z C, a to oznacza, że A jest mistrzem.

Nie inaczej bywa i w fizyce. Można podać wiele przykładów, choćby termodynamikę. Jedni są zafascynowani jej formalizmem matematycznym (czytaj – formami różniczkowymi), drudzy bardziej zachwycają się fizyczną treścią i pomysłowością dowodów korzystających z własności cykli Carnota. Ten artykuł traktuje o specyficznym cyklu Carnota i jeśli jest deklaracją przynależności autora do jakiejś szkoły, to niechybnie będzie nią szkoła z Glasgow. (Jak zatem będzie brzmiał właściwy przymiotnik?)

Z doświadczenia wiemy, że zamarzająca woda zwiększa swoją objętość. Dlatego czasami pękają źle zabezpieczone rury, a w górach woda zamarzająca w skalnych szczelinach kruszy najmocniejsze nawet skały, przyspieszając procesy erozji. Wykorzystamy fakt zmiany objętości cieczy podczas przemiany fazowej do ataku na drugą zasadę termodynamiki, by potem (niczym strażak, który podpala, żeby gasić) dzielnie ją obronić. Zbudujmy zatem cykl pokazany na rysunku na następnej stronie; nazwiemy ów cykl *lodową maszyną cieplną*.

Cylinder zamknięty ruchomym tłokiem (jak zwykle w tego rodzaju dyskusjach przyjmujemy, że tłok porusza się bez tarcia) wypełniony jest wodą o temperaturze równej temperaturze krzepnięcia. Na zewnątrz tłoka znajduje się powietrze o normalnym ciśnieniu atmosferycznym. Na tłoku (A) stawiamy ciało o masie m. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g, a więc aby podnieść ciało, należy wykonać pracę. Następnie w temperaturze krzepnięcia odbieramy od wody ciepło. Woda zamarza, zwiększa objętość i podnosi ciało znajdujące się na tłoku (B). Następnie (C) zsuwamy ciało z tłoka (praca związana z poziomym przesuwaniem tego ciała może być dowolnie mała). Na końcu dostarczamy do lodu ciepło, tak by go stopić, temperatura jest w tym procesie stała. Po stopieniu lodu układ znajduje się w stanie początkowym (D), natomiast masa m została podniesiona na wyższy poziom.

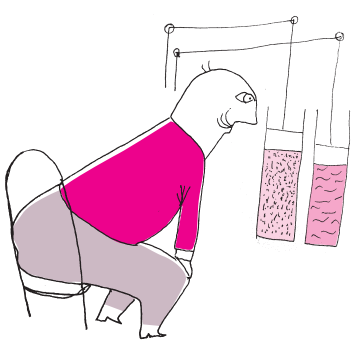


Lodowy silnik cieplny. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki praca wykorzystana do podniesienia masy m jest równa różnicy ciepeł: $W = Q_1 - Q_2$, gdzie Q_2 jest ciepłem wydzielającym się w trakcie zamarzania wody, a Q_1 jest ciepłem zużytym do stopienia lodu. Przyjmujemy, że układ jest na tyle mały, że możemy zaniedbać niejednorodność ciśnienia w zbiorniku

Druga zasada termodynamiki ma wiele równoważnych sformułowań.
W sformułowaniu Kelvina brzmi:
Nie jest możliwy proces, którego jedynym skutkiem byłoby pobranie pewnej ilości ciepła ze zbiornika i zamiana go w równoważną ilość pracy.

I tak oto natrafiamy na bardzo poważny kłopot. Wymiana ciepła pomiędzy wodą i otoczeniem oraz pomiędzy lodem i otoczeniem zachodzi w temperaturze 0°C, bo taka jest temperatura krzepnięcia wody i topnienia lodu. Efektywnie pobrane ciepło (czyli różnica ciepła pobranego przy topnieniu lodu i oddanego przy zamrażaniu wody) zostaje w całości zamieniona na pracę. Jest to sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki w sformułowaniu Kelvina!

Problem ten rozwiązał brat lorda Kelvina, James Thomson, profesor mechaniki inżynieryjnej na Uniwersytecie w Glasgow (lord Kelvin był profesorem fizyki tego Uniwersytetu). Proces zamarzania i proces topnienia przebiegają w innych warunkach. Ze względu na obecność masy m zamarzanie zachodzi przy wyższym ciśnieniu niż topnienie, kiedy na tłoku nie stoi już masa m. Jeśli słuszna jest druga zasada termodynamiki, to oba procesy muszą zachodzić w innej temperaturze. A to oznacza, że temperatura topnienia lodu zależy od jego ciśnienia. Ciało robocze (czyli woda/lód) musi wymieniać ciepło z dwoma termostatami. Pobierać ciepło od termostatu o wyższej temperaturze (topnienie lodu pod niższym ciśnieniem) i oddawać ciepło do termostatu o niższej temperaturze (zamarzanie wody przy podwyższonym ciśnieniu). Tak więc funkcja $p(T)$, czyli ciśnienie w funkcji temperatury dla współistnienia wody i lodu jest funkcją malejącą. Jest to fakt potwierdzony doświadczalnie.



Być może dziś wydaje nam się to trywialne, ale w tamtych czasach choć wiedziano o wpływie ciśnienia na temperaturę wrzenia, jednak nie wiedziano, że wpływa też na temperaturę topnienia. Czyż nie jest zatem piękne, że z faktu zmiany objętości substancji w trakcie przemiany fazowej – na podstawie drugiej zasady termodynamiki w jej historycznym, kelwinowskim sformułowaniu – potrafimy wyprowadzić istnienie związku pomiędzy temperaturą przemiany fazowej a ciśnieniem? Przysłowie mówi, że wszystkie drogi prowadzą do Rzymu. Termodynamicznym Rzymem jest Druga Zasada.

Zauważmy jeszcze jedną rzecz. W sytuacji, w której ciepło jest pobierane przez otoczenie przy innym ciśnieniu i temperaturze niż wtedy, gdy jest od otoczenia odbierane, musimy dwie izotermy połączyć dwiema adiabatami (a zatem otrzymujemy prawdziwy cykl Carnota), które nie były potrzebne w pierwszej, naiwnej (jednoizotermowej) wersji lodowego silnika cieplnego.

W powyższym rozumowaniu pominęliśmy zjawisko ściśliwości i wody, i lodu. Nie jest to jednak bardzo wielki grzech, jeśli tylko masa m nie jest zbyt duża. Zmiana objętości wywołana dodatkowym ciśnieniem pochodzącym od ciężaru ciała mg jest nieznaczna w porównaniu ze zmianą objętości podczas przemiany fazowej.