Delta i fizyka cząstek elementarnych (V): Od LEP-u do LHC: fizyka neutrin

*Piotr CHANKOWSKI**

Wydaną w 1963 roku, dla wielu „kultową", powieść Julia Cortázara *Gra w klasy* można czytać „po kolei" albo przyjmując zaproponowaną przez autora alternatywną kolejność rozdziałów, która pozwala odkrywać nowe sensy i znaczenia. Skorzystamy tutaj tego rozwiązania aby obejść ograniczenia techniczne *Delty* i pominiemy na razie wynikający z chronologii wydarzeń odcinek V dotyczący fizyki ciężkich zapachów. Ukaże się on w numerze czerwcowym.

Neutrina były przedmiotem wyjątkowo wielu artykułów i notek w *Delcie*. Przypomnę więc tu tylko, że na pomysł istnienia neutrina (elektronowego) wpadł W. Pauli w roku 1932, chcąc ratować zasadę zachowania energii (wydawało się, że jest ona pogwałcona w jądrowych rozpadach β). Zarejestrować neutrino udało się jednak dopiero w roku 1956 (Nagrodę Nobla otrzymali za to F. Reines i C.L. Cowan, Δ^3_{96}), gdy zbudowane po wojnie reaktory atomowe zaczęły jako produkt uboczny wytwarzać ich intensywne wiązki. Kolejnym krokiem było ustalenie, że neutrina powstające w słabych rozpadach mezonów $\pi^\pm$ nie są tożsame z neutrinami pochodzącymi z rozpadów β (Δ^2_{89}), a po odkryciu trzeciej rodziny fermionów jasne się stało, że powinno istnieć także (nie za ciężkie) neutrino ν_τ – co potwierdziły pomiary rozpadów Z^0 wykonane w LEP-ie (Δ^{11}_{90}) Jak już wspominałem w odcinku I, przez długie lata przyjmowano, że neutrina są bezmasowe i tak też została skonstruowana oryginalna wersja Modelu Standardowego.

Pisząc Δ^n_{XY}, odwołujemy się do numeru n *Delty* z roku 19XY lub 20XY. Pełna lista przywoływanych artykułów jest na stronie www.deltami.edu.pl.

Przełom w fizyce neutrin rozpoczął się od trwającego wiele lat eksperymentu R. Davisa (zob. Δ^4_{81}, Δ^{12}_{82}, Δ^9_{88}) uhonorowanego w roku 2002 Nagrodą Nobla (Δ^1_{03}). Wykazał on, że strumień docierających na Ziemię ze Słońca neutrin elektronowych jest mniej więcej trzykrotnie mniejszy, niż przewiduje teoria procesów zachodzących w Słońcu (Δ^1_{78}, Δ^3_{78}, Δ^4_{81}, Δ^{12}_{82}). Trzeba było jednak wielu lat, by ugruntowało się przekonanie, iż winna jest nie teoria Słońca, zwana Standardowym Modelem Słońca, w stworzenie której olbrzymi wkład wniósł J.N. Bahcall, lecz zachowanie samych neutrin.

Wiele współczesnych eksperymentów neutrinowych, np. CHOOZ Double CHOOZ, RENO, Daya Bay (Δ^5_{12}), wykorzystywało lub wykorzystuje wiązki neutrin produkowanych przez działające na potrzeby energetyki reaktory jądrowe.

Podobną zagadkę, stwierdzoną w latach dziewięćdziesiątych XX wieku, stanowiły neutrina produkowane w górnych warstwach atmosfery przez promieniowanie kosmiczne (Δ^2_{99}). Powstające tam mezony $\pi^\pm$ rozpadają się na pary $\mu\nu_\mu$, a z kolei miony μ rozpadają się na $e\nu_e\nu_\mu$; jak łatwo obliczyć, stosunek liczby neutrin mionowych do elektronowych powinien być więc równy 2. Tymczasem stosunek ten mierzony przy powierzchni Ziemi jest bliski 1 (Δ^2_{99}, Δ^{12}_{15}).

Hipoteza niezerowych mas neutrin była już dawniej rozpatrywana w kosmologii, ponieważ cząstki te odgrywają ważną rolę w ewolucji wszechświata (Δ^8_{82}). W szczególności, rozważania kosmologiczne pozwalają obliczyć gęstość tzw. neutrin reliktowych, stanowiących dziś tło kosmiczne analogiczne do kosmicznego promieniowania tła składającego się z fotonów. Można stąd znaleźć górne ograniczenia na wartość sumy mas lekkich neutrin. Neutrina spełniały też pewną rolę przy formowaniu się we wszechświecie obserwowanych dziś wielkoskalowych struktur i to stąd pochodzi obecne najostrzejsze górne ograniczenie na tę sumę mas, równe 0,66 eV/c^2. Ograniczenie to nie dotyczy hipotetycznych ciężkich neutrin, które uległyby rozpadowi w trakcie ewolucji wszechświata.

Dzięki wielu eksperymentom przeprowadzonym w większości w XXI wieku znamy już w zasadzie rozwiązanie tych zagadek. Od lat sześćdziesiątych XX wieku wysuwano myśl (koncepcje B. Pontecorvo, Z. Makiego, M. Nakagawy, S. Sakaty i S. Bilenkiego), że gdyby neutrina miały małe, ale niezerowe masy (Δ^3_{92}), powinno występować zjawisko oscylacji neutrin, podobne do wspomnianego już (w odcinku IV) mieszania się – czyli właśnie oscylacji – mezonów K^0 i $\overline{K^0}$ (Δ^5_{78}), lub B^0 i $\overline{B^0}$, polegające na tym, że z pewnym prawdopodobieństwem zmieniają one w locie swoją tożsamość (przykładowo neutrino ν_e przechodzi po pewnym czasie w ν_μ itp). Jeśli bowiem masy neutrin nie byłyby zerowe, na przykład z powodu jakichś oddziaływań z kondensatem pola Higgsa, neutrino ν_e powstające w wyniku absorpcji wirtualnego bozonu W^+ przez elektron (lub emisji wirtualnego W^-) nie odpowiadałoby cząstce fizycznej o dobrze określonej masie, lecz byłoby pewną superpozycją neutrin o dobrze określonych masach. Oznacza to po prostu, że przy absorpcji W^+ przez e^- może powstać dowolne z neutrin o dobrze określonych masach, każde z pewną amplitudą prawdopodobieństwa (podobnie jak przy absorpcji W^- przez kwark u może powstać albo d, albo s, albo b, zob. odcinek I). Z kolei tak wyprodukowane neutrino, absorbując W^-, może przejść w e^-, lub μ^-, lub τ^-.

Gdy można ograniczyć się tylko do oscylacji dwóch zapachów neutrin, np. $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, prawdopodobieństwo tego, że neutrino powstałe jako ν_e o energii E przejdzie w ν_μ po przebyciu dystansu L jest dane wzorem

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = 4\sin^2\theta_{12}(1-\sin^2\theta_{12}) \times$$
$$\times \sin^2\left(1{,}27\left(\frac{\Delta m^2_{12}}{(\mathrm{eV})^2}\right)\left(\frac{\mathrm{GeV}}{E}\right)\left(\frac{L}{\mathrm{km}}\right)\right).$$

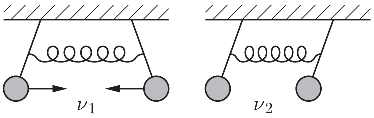
Czynnik $\sin^2\theta_{12}$ bierze się tu z modułu odpowiedniego elementu macierzy PMNS.

Z powyższego opisu wynika, że zjawisko zmieniania tożsamości przez neutrina ma w zasadzie takie samo podłoże jak reakcje słabe, w których zmianie ulega dziwność, powab lub piękno hadronu (tj. zapach jednego z tworzących hadron kwarków). Odpowiednie amplitudy powstania neutrin o określonej masie w wyniku absorpcji W^+ przez e^-, μ^- lub τ^- tworzą unitarną macierz PMNS (od nazwisk Pontecorvo, Makiego, Nakagawy i Sakaty) o trzech wierszach i trzech kolumnach. Podobnie jak macierz CKM zależy ona od trzech kątów i jednej obserwowalnej w oscylacjach neutrin tzw. fazy, tj. kierunku na płaszczyźnie zespolonej. Ponieważ jednak, w odróżnieniu od kwarków, neutrina mogą niemal swobodnie przebywać bardzo duże odległości, zanim zostaną zarejestrowane przez swoje oddziaływania słabe, wygodniejszy jest w ich przypadku inny opis: zamiast mówić, że w wyniku absorpcji W^+ przez e^- może powstać dowolne z neutrin o określonej masie, przyjmujemy, że powstaje wtedy ν_e, które w locie może zmienić się w ν_μ lub ν_τ (lub, o czym piszę dalej, w tzw. neutrino

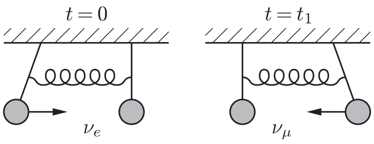
*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

sterylne ν_s); pozwala to skupić się na zależności prawdopodobieństwa takich oscylacji od energii lecącego neutrina i od przebytej przez nie odległości. (W podobny sposób opisuje się też oscylacje neutralnych mezonów, z tym że w ich przypadku wchodzące w grę odległości są rzędu milimetrów.)

Sprzężone wahadła stanowią poglądowy model oscylacji neutrin. Neutrinom ν_1 i ν_2 o określonych masach odpowiadają dwa typy drgań o dobrze określonych częstotliwościach sprzężonych wahadeł,



a powstaniu neutrina ν_e (ν_μ) odpowiada wprawienie w $t = 0$ w ruch tylko lewego (prawego) wahadła:



Po pewnym czasie t_1 lewe wahadło na chwilę zatrzyma się, a z pełną amplitudą drgać będzie prawe wahadło; po $t = 2t_1$ zatrzyma się prawe wahadło, a drgać będzie lewe itd. Można powiedzieć (choć usiłuję tu w sposób niedoskonały oddać efekt kwantowy za pomocą mechanicznego modelu), że w każdej chwili $0 < t < t_1$ są niezerowe prawdopodobieństwa znalezienia tego układu w stanach reprezentujących ν_e i ν_μ.

Efekty takie, jak obserwowany przez R. Davisa deficyt pochodzących ze Słońca ν_e, tłumaczy się w tym obrazie tym, że jego detektor mógł rejestrować jedynie ν_e; tymczasem część tych ν_e przeszła w ν_μ, których detektor zobaczyć nie mógł. W podobny sposób działają(ły) wszystkie eksperymenty typu „znikanie" (ang. *disappearance experiments*) SAGE, GALLEX, Kamiokande, Super-Kamiokande, KamLAND, Δ^2_{99}. „Znikanie" może być uwarunkowane kinematyką reakcji, np. w Kamiokande neutrina ν_μ, w które zmieniły się ν_e ze Słońca, nie mogły produkować μ^- z powodu niedostatecznej energii i dlatego nie mogły zostać zarejestrowane. Czytelnicy zaznajomieni ze szczególną teorią względności mogą pokusić się o obliczenie, jak duża musi być energia neutrina ν_μ, by zderzając się ze spoczywającym elektronem, mogło ono spowodować reakcję $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ (rozwiązanie na końcu artykułu).

Opisany w odcinkach I i II Model Standardowy przyjmuje, że istnieją tylko trzy rodzaje neutrin, ν_e, ν_μ i ν_τ (czyli że są tylko trzy neutrina o dobrze określonej masie), które wszystkie oddziałują z $W^\pm$ i Z^0. W zasadzie mogłyby jednak istnieć także dodatkowe neutrina ν_s nieoddziałujące z bozonami pośredniczącymi (a wiec niezostawiające żadnych śladów w detektorach), nazywane sterylnymi, w które neutrina „aktywne", ν_e, ν_μ i ν_τ mogłyby się także zamieniać. Oznaczałoby to, iż neutrin o dobrze określonych masach jest też więcej niż trzy.

Celem prowadzonych w XXI wieku eksperymentów neutrinowych było więc, po pierwsze, ustalenie, czy hipoteza niezerowych mas neutrin i oscylacji może w sposób niesprzeczny wyjaśnić zagadkowe znikanie neutrin i ile jest neutrin o określonych masach (trzy czy więcej), a następnie wyznaczenie kluczowych parametrów, którymi są różnice kwadratów mas neutrin i wartości elementów macierzy PMNS.

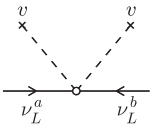
W rzeczywistości przemiana w ν_μ neutrin ν_e powstających przy spalaniu we wnętrzu Słońca wodoru w hel zachodzi gównie w bardziej zewnętrznych warstwach Słońca. Wskutek dużej gęstości materii zachodzi tam wzmocnienie oscylacji podobne do zjawiska rezonansu w pobudzanych mechanicznych układach drgających. Zwie się to mechanizmem MSW, od nazwisk S. Michejewa, A. Smirnowa i L. Wolfensteina.

Dzięki trwającym już prawie ćwierć wieku badaniom eksperymentalnym (z)realizowanym przez wiele grup uzyskaliśmy odpowiedzi na wiele pytań dotyczących neutrin. Eksperymenty SAGE, GALLEX, Kamiokande, a później Super-Kamiokande (ostatnie dwa nagrodzone Nagrodami Nobla w latach 2002 i 2015, Δ^1_{03}, Δ^{12}_{15}) potwierdziły i uściśliły wyniki Davisa dotyczące neutrin słonecznych oraz dokładnie zbadały znikanie neutrin ν_μ pochodzących z atmosfery. Kluczowy eksperyment SNO (Δ^7_{02}), również nagrodzony Nagrodą Nobla w 2015 roku (Δ^{12}_{15}), umożliwił pomiar całkowitego strumienia „aktywnych" neutrin pochodzących ze Słońca i silnie ograniczył możliwość przechodzenia słonecznych ν_e w neutrina sterylne. Przeprowadzono też bardziej kontrolowane eksperymenty (KamLAND, K2K, T2K) typu „znikanie", jak też i eksperyment OPERA typu „pojawianie się" (ang. *appearance*) polegające na wysyłaniu precyzyjnie mierzonej wiązki neutrin do odległych nawet o setki kilometrów detektorów (Δ^2_{07}, Δ^{10}_{11}, Δ^1_{12}); ponieważ prawdopodobieństwo oscylacji zależy od przebytego przez neutrina dystansu, niektóre efekty mogą ujawnić się tylko przy takich odległościach. W rezultacie tych badań ustalona została dość dokładnie struktura macierzy PMNS i wyznaczono determinujące charakter oscylacji różnice kwadratów mas neutrin. W odróżnieniu od macierzy CKM macierz PMNS jest bardziej „demokratyczna": dwa jej kąty mają duże wartości (dwa z nich są bliskie $\pi/4$). Niezwykle istotnym wynikiem jest niedawne zmierzenie niezerowej wartości trzeciego kąta macierzy PMNS (Δ^5_{12}): wynik ten oznacza, że, być może, uda się kiedyś zarejestrować w oscylacjach neutrin efekty łamania symetrii CP.

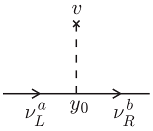
Zbiorcze analizy danych z różnych eksperymentów neutrinowych dają $\Delta m^2_{21} \equiv m^2_{\nu_2} - m^2_{\nu_1} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ eV$^2/c^2$, $|\Delta m^2_{32}| \approx 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ eV$^2/c^2$ (od znaku Δm^2_{21} zależą przewidywania wykorzystujące wspomniany wyżej mechanizm MSW). Wyniki te nie wyznaczają samych mas neutrin i dopiero w połączeniu z innymi ograniczeniami pozwalają stwierdzić, że neutrina są dużo lżejsze od najlżejszego z naładowanych elektrycznie leptonów, czyli elektronu.

Jak te wyniki i ich fenomenologiczny opis mają się do Modelu Standardowego? Czy konieczne będzie „przepisywanie na nowo podręczników"? Jeśli przyjmie się, że jedynymi neutrinowymi „cegiełkami" są trzy lewochiralne pola neutrin (po jednym na każdą rodzinę fermionów), to bezmasowość neutrin jest konsekwencją żądania renormalizowalności (zob. odcinek III) Modelu Standardowego. Bezmasowość wyklucza zaś oscylacje. Renormalizowalność, choć była ważną wskazówką dla twórców Modelu Standardowego, nie jest jednak, jak to dziś rozumiemy, bezwzględnym wymogiem. Jeśli zaś dopuścić, że Model Standardowy może być „trochę" nierenormalizowalny (a z dzisiejszej perspektywy nie ma powodów, by był teorią ściśle renormalizowalną), to masy neutrin (i mieszanie) można bardzo łatwo uwzględnić w ogólnych ramach tej teorii przez dopisanie do jej równań wyrazów dających oddziaływanie dwóch lewochiralnych pól neutrin z dwoma polami Higgsa, a więc i z jego kondensatem. Otrzymane w taki sposób masy neutrin nazywa się masami Majorany; neutrina o określonej masie są wtedy neutralnymi fermionami Majorany, które same są swoimi antycząstkami.

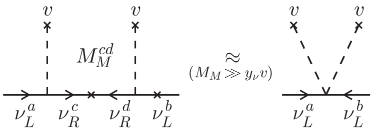
Możliwe (nierenormalizowalne) oddziaływanie lewoskrętnych neutrin ν_L^a $(a, b = e, \mu, \tau)$ z kondensatem v pola Higgsa.



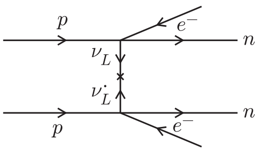
Zwykłe oddziaływanie Yukawy lewoskrętnych ν_L^a i prawoskrętnych ν_R^b neutrin z kondensatem generujące masy Diraca.



Mechanizm huśtawki generowania mas neutrin w wyniku oddziaływań.



Jeśli neutrina o dobrze określonych masach są rzeczywiście fermionami Majorany (czyli są same swoimi antycząstkami), możliwe są procesy $\beta\beta0\nu$, zwane podwójnymi bezneutrinowymi rozpadami β (zob. Δ^3_{92}), czyli jądrowe rozpady $J(A,Z) \to J(A, Z \mp 2) + e^{\pm} + e^{\pm}$.



Procesy $\beta\beta0\nu$ nie są możliwe, jeśli neutrina są fermionami Diraca. Około dziesięciu lat temu były doniesienia zarejestrowaniu takich rozpadów, wyniki te nie zostały jednak potwierdzone.

Inną możliwością jest przyjęcie, że na każdą rodzinę fermionów przypadają dwa pola neutrinowe o przeciwnych chiralnościach. Masy neutrin (i tym samym ich oscylacje) można wtedy otrzymać w taki sam sposób, jak masy kwarków – z oddziaływania neutrin z kondensatem pola Higgsa poprzez stałe sprzężenia Yukawy y_ν (odcinek I) – a pochodzenie macierzy PMNS jest wtedy takie samo, jak macierzy CKM. Byłyby wtedy trzy neutrina o dobrze określonych masach (każde mogłoby mieć dwie skrętności) i każde miałoby do pary swoje antyneutrino. Takie neutrina nazywa się neutrinami Diraca. Jednak wobec faktu, że masy neutrin są o rzędy wielkości mniejsze niż masy naładowanych leptonów, najbardziej uzasadniona wydaje się jeszcze inna możliwość. Ponieważ prawochiralne pola neutrin nie zmieniają się pod wpływem przekształceń z grupy $\mathrm{SU}(2)_W \times \mathrm{U}(1)_Y$ (czyli nie oddziałują z bozonami $W^{\pm}$ i Z^0 – są więc sterylne) można bez psucia symetrii cechowania i renormalizowalności dopisać do równań uogólnionego (przez dołączenie prawochiralnych pól neutrin) Modelu Standardowego odpowiednie wyrazy (zwane masami Majorany), które, gdyby nie było oddziaływań z kondensatem pola Higgsa, powodowałyby, że kwantami prawochiralnych pól neutrinowych byłyby trzy masywne fermiony Majorany.
W obecności dodatkowych oddziaływań neutrin z kondensatem pola Higgsa (przez sprzężenia Yukawy) dopisane wyrazy powodują jednak, że kwantami sześciu pól neutrinowych jest sześć neutrin Majorany o dobrze określonych masach. W ogólności neutrina aktywne ν_e, ν_μ i ν_τ mogłyby wtedy przechodzić w neutrina sterylne (będące kwantami prawochiralnych pól neutrin), co byłoby sprzeczne z wynikami eksperymentu SNO. Jeśli jednak masy Majorany prawochiralnych neutrin są bardzo duże w porównaniu z masami generowanymi przez oddziaływanie z kondensatem, oscylacje neutrin aktywnych w sterylne stają się bardzo mało prawdopodobne i dodatkowo masy trzech neutrin stają się bardzo małe (trzy pozostałe neutrina stają się zaś bardzo ciężkie) – uzyskuje się w ten sposób naturalne wyjaśnienie wyjątkowej lekkości neutrin. Mechanizm taki nazywa się „mechanizmem huśtawki”. Choć uzyskana w taki sposób modyfikacja Modelu Standardowego jest renormalizowalna, efektywnym opisem fizyki procesów zachodzących z udziałem cząstek o niskich energiach (pomijającym całkowicie istnienie trzech ciężkich neutrin Majorany) jest przedstawiona tu jako pierwsza możliwość nierenormalizowalna wersja Modelu Standardowego z trzema lewochiralnymi polami neutrin i ich oddziaływaniem z kondensatem. Rachunki pokazują, że wspomniane masy Majorany powinny być rzędu $(10^{12} - 10^{14})$ GeV, co wydaje się wiązać je ze skalą tzw. Wielkiej Unifikacji. O takich, bardziej spekulatywnych ideach napiszę na zakończenie cyklu.

Rozwiązanie zadania. Masy neutrin, znacznie mniejsze niż wszelkie inne skale energii występujące w tych rozważaniach, można całkowicie pominąć, trzeba jednak korzystać z kinematyki relatywistycznej. W układzie środka masy, w którym wektorowa suma pędów neutrina ν_μ i elektronu przed reakcją jest równa zeru, podobnie jak suma pędów powstałego w reakcji mionu μ^- i neutrina ν_e, bilans energii jest oczywisty:

$$|\mathbf{k}|c + \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{k}^2c^2} = \sqrt{M^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} + |\mathbf{p}|c,$$

gdzie m i M są odpowiednio masami elektronu i mionu, a $|\mathbf{k}|$ i $|\mathbf{p}|$ są wartościami pędów cząstek przed i po reakcji. Energia $|\mathbf{k}|c$ neutrina ν_μ, potrzebna do wywołania reakcji, jest minimalna, gdy energie cząstek końcowych są minimalne, $|\mathbf{p}|c \to 0$. stąd otrzymujemy

$$|\mathbf{k}|_{\min} = \frac{(M^2 - m^2)c}{2M}.$$

Aby znaleźć minimalną energię ν_μ w układzie, w którym początkowy elektron spoczywa, trzeba przejść do układu poruszającego się z odpowiednią prędkością V (skierowaną wzdłuż kierunku pędu $\mathbf{k}$). Przy takim przejściu energia E każdej cząstki i składowa jej pędu q równoległa do V przekształcają się do wartości odpowiednio E' i q' według wzorów:

$$E' = \gamma(V)(E + Vq), \qquad q' = \gamma(V)(VE/c^2 + q), \qquad \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Przyjmując, że w układzie środka masy dla elektronu jest $(E_e, q_e) = (\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{k}^2c^2}, -|\mathbf{k}|)$, i żądając, by było $(E'_e, q'_e) = (mc^2, 0)$, wyliczamy, że $V/c = (M^2 - m^2)/(M^2 + m^2)$. Ponieważ w układzie środka masy zachodzi $(E_{\nu_\mu}, q_{\nu_\mu}) = (|\mathbf{k}|c, |\mathbf{k}|)$, wykorzystując znalezione V, obliczamy, że w układzie, w którym elektron spoczywa mamy

$$E'_{\nu_\mu} = \frac{(M^2 - m^2)c^2}{2m},$$

co daje około 10 GeV. Tymczasem elektrony pochodzące ze Słońca mają energie rzędu MeV.

Zadanie to ma krótsze rozwiązanie, o ile umiemy posłużyć się przekształceniami Lorentza. Są to wielkości, których wartość nie zależy od układu odniesienia użytego do ich obliczenia. Jednym z nich jest niezmiennik s będący kwadratem całkowitego czteropędu układu: $s = E^2_{\mathrm{tot}} - \mathbf{P}^2_{\mathrm{tot}}c^2$. Ponieważ reakcja nie zmienia całkowitego pędu ani całkowitej energii układu, s po reakcji ma tę samą wartość, co przed reakcją. Po reakcji $s_{\min} = m^2c^4$ ($s_{\min}$ obliczamy w układzie środka masy); przed reakcją zaś $s = (mc^2 + |\mathbf{k}'|c)^2 - (\mathbf{k}'c)^2$ (tym razem obliczamy niezmiennik w układzie, w którym początkowy elektron spoczywa). Stąd otrzymujemy natychmiast

$$|\mathbf{k}'|_{\min}c = E'_{\nu_\mu} = \frac{(M^2 - m^2)c^2}{2m}.$$