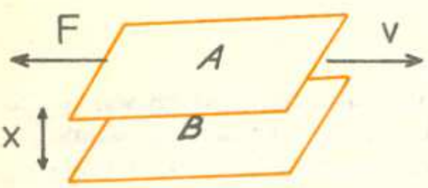
Dr Jan A. GAJ

WIELKOŚĆ FIZYCZNA, KTÓRA RATUJE ŻYCIE SKOCZKOM SPADOCHRONOWYM

Wielu z Was domyśla się z pewnością, że będziemy się zajmować lepkością, a szczególnie lepkością powietrza. Tak, również i powietrze jest lepkie, co można zaobserwować w wielu sytuacjach. Wprawdzie machając ręką w powietrzu nie czujemy wielkiego oporu powietrza, ale wystawiając rękę przez okno jadącego szybko pociągu lub samochodu możemy łatwo odczuć tę siłę. W doświadczeniu z ubiegłego miesiąca wyznaczaliśmy jej wartość dla piłeczki umieszczonej w strumieniu powietrza wypływającego z odkurzacza. Gdyby nie zjawisko lepkości, skoczkowie spadochronowi zabijaliby się masowo rozpędzając się do olbrzymich prędkości pod wpływem przyciągania ziemskiego. Oczywiście zanim przystąpimy do jakichkolwiek doświadczeń, musimy wyjaśnić sprawę podstawową, a mianowicie

Współczynnik lepkości η wyrażamy w $\frac{N \cdot S}{m^2}$

SKĄD SIĘ BIERZE LEPKOŚĆ?



Siła oporu lepkiego powstaje zawsze tam, gdzie istnieje ruch warstw ośrodka względem siebie.
Niech warstwa cieczy lub gazu A porusza się z prędkością v względem odległej o x warstwy B. W wyniku przenikania cząsteczek z warstwy wolniejszej (B) do szybszej (A), ta ostatnia jest hamowana z pewną siłą F. Można łatwo zgadnąć, że:

1) **Siła F jest proporcjonalna do powierzchni warstw** (S). Liczba przenikających cząsteczek będzie tym większa, im większa będzie powierzchnia.

2) **Siła F jest odwrotnie proporcjonalna do odległości warstw.** Cząsteczki przenikają szybciej przy mniejszej odległości.
Przeprowadzając szczegółowy rachunek w oparciu o teorię kinetyczno-cząstkową (niestety, nasza rubryka nie jest miejscem, w którym można by go przytoczyć), można wykazać ilościowo tezy 1 i 2, a także wywnioskować, że:

3) **Siła F jest wprost proporcjonalna do prędkości względnej warstw.**
Matematycznie ujmujemy to tak:

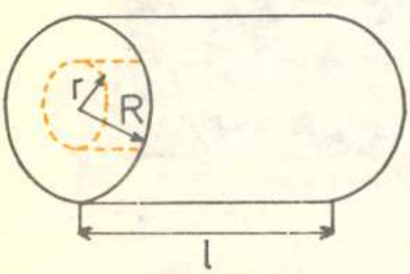
$$F = -\eta \frac{S \cdot v}{x}$$

albo, ściślej, po przejściu do granicy bardzo bliskich warstw:

$$F = -\eta S \frac{dv}{dx};$$

η jest współczynnikiem proporcjonalności charakteryzującym ośrodek i nosi nazwę **współczynnika lepkości.** Znając podstawowe prawo rządzące przepływem lepkich cieczy i gazów możemy zastanowić się nad konkretnym zagadnieniem o dużym znaczeniu praktycznym:

JAK CIECZ PŁYNIE PRZEZ PRZEWODY?



Intuicyjnie możemy się domyślać, że przy przepływie np. przez rurę o przekroju kołowym największą prędkość będzie miała ciecz w środku, a najmniejszą blisko ścianek rury. Widać też, że zjawisko ma symetrię cylindryczną, to znaczy prędkość będzie zależeć tylko od odległości r od osi rury. Wyodrębnijmy w myśli walec o promieniu r wewnątrz rury.
Niech ruch cieczy odbywa się pod wpływem ciśnienia p. Siła działająca na nasz walec będzie iloczynem ciśnienia p przez powierzchnię przekroju poprzecznego walca: $F_1 = p \cdot \pi r^2$. Będzie ona równoważona przez siłę oporu lepkiego, zgodnie z naszymi dotychczasowymi rozważaniami, wyrażającą się przez iloczyn lepkości przez pochodną prędkości $\frac{dv}{dr}$ i powierzchnię (boczną) walca

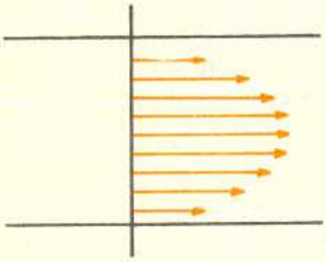
$$F_2 = \eta \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r l.$$

Warunek równowagi: $F_1 + F_2 = 0$ prowadzi do wniosku:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{pr}{2\eta l}.$$

Ci z Was, którzy znają rachunek różniczkowy, mogą łatwo sprawdzić, że równanie to spełnia funkcja

$$v = \frac{p}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$



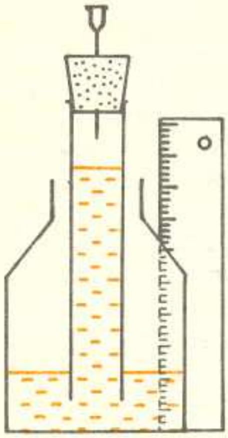
Pozostali muszą mi wierzyć. Otrzymaliśmy więc rozkład prędkości o kształcie paraboli.

Widać, że prędkość maksymalna $v_{max} = \frac{pR^2}{4\eta l}$. Można również przekonać się, że prędkość średnia jest równa połowie prędkości maksymalnej

$$\bar{v} = \frac{pR^2}{8\eta l}.$$

Istotny dla nas jest wniosek o proporcjonalności prędkości do ciśnienia lub, inaczej mówiąc, siły oporu do prędkości, charakterystyczny dla ruchu lepkich substancji.
Na pewno wielu z Was już od jakiegoś czasu zadaje sobie pytanie:

JAK MOŻNA WYZNACZYĆ LEPKOŚĆ?



Posłużymy się w tym celu nadzwyczaj prostym przyrządem: kawałkiem (ok. 0,5 m) rurki lub węża, który zatkamy z jednej strony szczelnie korkiem. W korek wbijemy igłę, jaką używa się do zastrzyków (dostępną tanio i w każdej aptece).
Po napełnieniu wodą umieszczamy rurkę pionowo w cylindrycznym naczyniu z niewielką ilością wody (rys. 4). Pod wpływem ciśnienia słupa wody rurce zacznie się przepływ wody z rurki do naczynia, hamowany przez opów powietrza przepływającego przez igłę od strzykawki. Mierząc prędkość opadanira wody w rurce (lub przybywania jej w naczyniu) i znając średnicę otworu w igle możemy określić średnią prędkość przepływu powietrza przez igłę. Teraz, posługując się już wprowadzonym uprzednio wzorem, możemy obliczyć lepkość, pamiętając, że ciśnienie jest po prostu ciśnieniem słupa wody:

$$p = \varrho \cdot g \cdot h.$$

W tej chwili zaczną się już na pewno buntować wszyscy, którzy czytali poprzedni numer »Delty«. Wielu z nich wykonało doświadczenie, w którym stwierdzili z pewnością, że opór powietrza dla piłeczki pingpongowej jest w granicach dokładności pomiaru proporcjonalny do kwadratu jej prędkości względem powietrza, a nie, jakby z dzisiejszych rozważań wynikało, do samej prędkości. Należy więc wreszcie wyjaśnić:

PRĘDKOŚĆ POWIETRZA CZY JEJ KWADRAT?

I to, i to. Nie musicie mi jednak wierzyć na słowo. W naszym doświadczeniu możemy to bezpośrednio sprawdzić, znajdując, jak zmienia się poziom wody w rurce w funkcji czasu. Spróbujemy najpierw przewidzieć, jakie wnioski o tej zależności wynikają z dwóch różnych założeń, które możemy uczynić. Przyjmijmy najpierw, że siła jest proporcjonalna do prędkości, a więc prędkość jest proporcjonalna do ciśnienia. Prędkość opadania słupa wody w rurce v_w (którą mierzymy) jest oczywiście proporcjonalna do prędkości przepływu powietrza przez igłę v_p:

$$\frac{dh}{dt} = v_w = A \cdot v_p$$

Z drugiej strony prędkość v_p jest, jak założyliśmy, proporcjonalna do ciśnienia, a więc do wysokości słupa wody:

$$v_p = -B \cdot h$$

(minus, ponieważ v_p skierowana jest w dół, a h mierzymy w górę). Po podstawieniu otrzymujemy, że szybkość opadania słupa wody jest proporcjonalna do jego wysokości h:

$$-\frac{dh}{dt} = A \cdot B \cdot h.$$

Równanie to występuje w opisie wielu różnych zjawisk fizycznych, jak na przykład rozpad promieniotwórczy czy rozładowanie kondensatora przez opór. Jego rozwiązanie (co również możecie łatwo sprawdzić) jest funkcją wykładniczą postaci:

$$h(t) = h_0 e^{-ABt},$$

Rozwiązanie zadania M 47

Niech $z = \sqrt{\frac{x+1}{x+y}}$, $t = \sqrt{\frac{x+1}{y+2}}$.
Dany układ równań przybiera postać

$$z + \frac{1}{z} = 2,$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}.$$

Równania te można napisać w postaci

$$z^2 - 2z + 1 = 0,$$
$$2t^2 - 3t - 2 = 0.$$

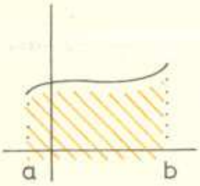
Otrzymujemy stąd $z = 1$ i $t = 2$ (bo $t > 0$).
Jest więc

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+y}} = 1, \quad \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} = 2,$$

skąd $y = 1$, $\sqrt{\frac{x+1}{3}} = 2$ i $x = 11$.

Rozwiązanie zadania M 48

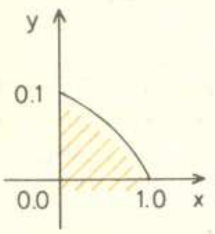
Całkę funkcji ciągłej i nieujemnej można interpretować jako pole. Jak wiadomo, $\int_a^b f(x)\,dx$ jest równa polu zakreślonemu:



Aby zastosować tę uwagę, zmieńmy w pierwszej całce oznaczenia z x na y. Mamy więc wykazać

$$\int_0^1 \sqrt[m]{1-y^n}\,dy = \int_0^1 \sqrt[n]{1-x^m}\,dx.$$

Rysując odpowiedni wykres stwierdzamy, że w obu przypadkach liczymy pole tego samego obszaru, który jest ograniczony odcinkami



$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

i krzywą

$$x^m + y^n = 1,$$

raz przyjmując za zmienną niezależną y, raz — x.

gdzie h_0 jest wysokością początkową (w chwili $t = 0$), a $e \simeq 2{,}72$ jest podstawą logarytmów naturalnych. Wygodnie jest zapisać ten wzór w postaci:

$$\log_{10} h = \log_{10} h_0 - ABt \log_{10} e.$$

Widać, że logarytm h zmienia się w czasie liniowo. Przedstawiając więc logarytm zmiennej wysokości h na wykresie jako funkcję czasu, możemy przekonać się, czy otrzymany wzór jest słuszny, czy nie (jeśli tak — otrzymamy linię prostą). Z braku miejsca nie przytoczę podobnego rozumowania, z którego wynika, że przy kwadratowej zależności oporu od prędkości (a więc przy prędkości wypływu proporcjonalnej do pierwiastka z ciśnienia) zależność h od czasu powinna być kwadratowa:

$$h(t) = h_0(t - t_0)^2,$$

gdzie h_0 jest wysokością początkową, a t_0 czasem, po którym wysokość spadnie do zera. W tym przypadku przedstawiając pierwiastek z h jako funkcję czasu powinniśmy otrzymać na wykresie prostą. Jak jest w rzeczywistości — przekonajcie się sami.

Niezależnie jednak od tego, co Wam wyjdzie, pamiętając wyniki doświadczenia z ubiegłego miesiąca macie prawo zapytać:

CZY ZALEŻNOŚĆ KWADRATOWĄ MOŻNA WYJAŚNIĆ TEORETYCZNIE?

W każdym razie łatwo wyjaśnić odstępstwa od zależności liniowej. U podstaw naszych rozwiązań teoretycznych leżało bowiem założenie, że ruch cieczy odbywa się w warstwach. Taki ruch nazywa się **laminarny.** Doświadczenie uczy, że powyżej pewnej prędkości zaczynają tworzyć się wiry, ośrodek silnie się miesza — występuje przepływ **burzliwy,** czyli **turbulentny.** Wtedy część potencjalnej energii ciśnienia przetwarza się na energię kinetyczną płynu w wirze. Przy prędkości zwiększającej się coraz bardziej ta część będzie miała coraz większe znaczenie, aż wreszcie stanie się dominująca. Jaka jest zależność oporu od prędkości przepływu przy całkowitej zamianie energii ciśnienia na kinetyczną, możecie wywnioskować z zasady zachowania energii. Znane szkolne zadanie rozważa wypływ cieczy z naczynia przez małą dziurkę. Wiadomo, że otrzymuje się wtedy prędkość proporcjonalną do pierwiastka z ciśnienia:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}},$$

gdzie ϱ jest gęstością cieczy.

Odpowiada to kwadratowej zależności oporu od prędkości. Widać więc, że przepływ laminarny i skrajnie burzliwy są pewnymi wyidealizowanymi przypadkami granicznymi. W obszarze przejściowym zależność oporu od prędkości jest bardzo skomplikowana, a jej opis teoretyczny bardzo trudny.

O wyszukiwaniu informacji

Prof. dr Zdzisław PAWLAK

Książka telefoniczna, katalog w bibliotece, lista płacy w przedsiębiorstwie, spis lokatorów domu, mały rocznik statystyczny, karty pracy robotników jakiegoś przedsiębiorstwa, katalog znaczków pocztowych, kartoteka przestępców, kartoteka pacjentów w przychodni lekarskiej — wszystko to są przykłady zbiorów informacji.

Chcąc poznać numer telefonu kolegi, znaleźć interesującą nas książkę w bibliotece czy określić wartość nowo zdobytego znaczka pocztowego, należy zajrzeć do książki telefonicznej, katalogu bibliotecznego bądź filatelistycznego.

Wyszukiwanie potrzebnych nam informacji jest jedną z najczęściej występujących czynności we wszelkiego rodzaju poczynaniach: w życiu codziennym, pracy, nauce, rozrywce.

Aby jednakże znaleźć to, czego szukamy w interesującym nas katalogu czy spisie, musimy wiedzieć, o co nam chodzi; inaczej mówiąc, musimy jakoś scharakteryzować poszukiwane informacje przez podanie nazwiska i adresu kolegi, autora i tytułu książki bądź serii i kraju, z którego pochodzi znaczek. Proces znajdowania interesującej nas informacji jest we wszystkich podanych przykładach bardzo prosty, i sprowadza się do przeszukania odpowiednich spisów (katalogów). Sprawa się znacznie komplikuje, gdy zbiory informacji są bardzo duże. Np. gdybyśmy chcieli stworzyć i wykorzystywać spis wszystkich obywateli kraju, w którym każdy obywatel jest dokładnie scharakteryzowany, albo centralny krajowy katalog książek czy też światowy rozkład