Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii

Albert EINSTEIN

Albert Einstein (1879–1955) był nie tylko uczonym, ale też popularyzatorem fizyki, a w pewnym sensie także publicystą naukowym. Jego artykuł popularny *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy* jest nieznany szerokim kręgom, zapewne dlatego, że Einstein opublikował go w mało znanym fizykom piśmie izraelskim *Technical Journal* (Haifa), 1946, V, 16-17. Polski tekst artykułu jest tłumaczeniem z rosyjskiego przekładu artykułu [Albert Einstein, *Sobranie nauchnyh trudov*, tom 2, 650–652, Izd. *Nauka*, Moskva 1966]. Przedruki tego tekstu znajdują się w Δ^{12}_{79}, Δ^{6}_{05} oraz Δ^{9}_{20}.

Przedstawione tu wyprowadzenie prawa równoważności, dotychczas nigdzie nie publikowane, ma dwie zalety. Chociaż wykorzystuje się w nim szczególną zasadę względności, nie wymaga to jednak stosowania formalnego aparatu teorii; dowód opiera się jedynie na trzech znanych wcześniej prawach:

(1) zasadzie zachowania pędu,

(2) wyrażeniu na pęd promieniowania, czyli – pęd pakietu falowego poruszającego się w danym kierunku,

(3) znanym wyrażeniu dla aberracji światła (wpływu ruchu Ziemi na widziane z Ziemi położenie nieruchomych gwiazd, czyli – na prawie Bradleya).

Rozpatrzmy teraz następujący układ. Niech ciało B spoczywa swobodnie w przestrzeni względem układu odniesienia K_0. Dwa pakiety falowe S i S', o energii $E/2$ każdy, poruszają się odpowiednio w dodatnim i ujemnym kierunku osi x_0, padają na ciało i są przez nie pochłonięte. W wyniku tego procesu energia ciała zwiększa się o E. Ciało B pozostaje przy tym w spoczynku względem układu K_0, a wynika to z symetrii zagadnienia. Rozważmy teraz ten sam proces z układu odniesienia K poruszającego się względem układu K_0 ze stałą prędkością o wartości v w ujemnym kierunku osi z_0. W układzie K rozważany proces opisuje się następująco: ciało B porusza się w dodatnim kierunku osi z z prędkością o wartości v. Kierunki dwóch pakietów falowych w układzie K tworzą z osią x kąt α. Zgodnie z prawem aberracji, w pierwszym przybliżeniu zachodzi związek: $\alpha = v/c$, gdzie c – prędkość światła. Z rozważań dotyczących przebiegu procesu w układzie K_0 wiemy, że prędkość ciała B po pochłonięciu pakietów falowych S i S' nie ulegnie zmianie. Zastosujemy teraz do naszego układu prawo zachowania pędu dla składowych w kierunku z w układzie K.

I. Niech M oznacza masę ciała B do chwili pochłonięcia pakietów falowych; w takim razie Mv jest pędem ciała B (zgodnie z mechaniką klasyczną). Każdy pakiet falowy ma energię $E/2$, a więc – zgodnie ze znanym wnioskiem z teorii Maxwella – jego pęd ma wartość $E/2c$. Ściśle rzecz biorąc, tyle jest równy pęd pakietu falowego S względem układu odniesienia K_0. Kiedy jednak prędkość v jest mała w porównaniu z c, wówczas pęd w układzie K ma taką samą wartość – z dokładnością do wielkości małej drugiego rzędu (v^2/c^2 w porównaniu z 1). Wartość składowej tego pędu wzdłuż osi z jest równa $\frac{E}{2c}\sin\alpha$, albo – z wystarczającą dokładnością (jeśli pominąć wielkości małe wyższych rzędów) – $\frac{E}{2c}\alpha$ lub $\frac{E}{2}\frac{v}{c^2}$. Zatem składowe pędów pakietów falowych S i S' wzdłuż osi z są w sumie równe $E\frac{v}{c^2}$. Tak więc pęd całkowity układu przed aktem pochłonięcia jest równy

$$Mv + \frac{E}{c^2}v.$$

II. Niech M' oznacza masę ciała B po akcie pochłonięcia. Z góry bierzemy tu pod uwagę możliwość zwiększenia masy po pochłonięciu energii E (jest to konieczne, aby ostateczny wynik naszych obliczeń był niesprzeczny). Wobec tego pęd układu po akcie pochłonięcia będzie równy

$$M'v.$$

Skorzystamy wreszcie z zasady zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi z. Daje to związek

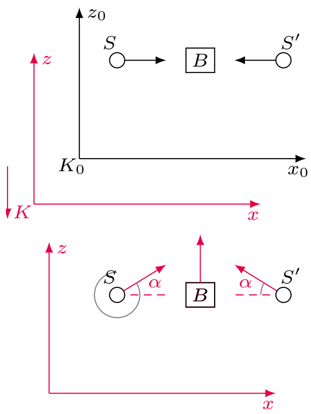
$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

lub

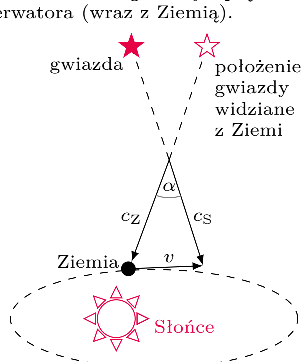
$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Związek ten wyraża prawo równoważności energii i masy. Zwiększenie energii o E wiąże się ze wzrostem masy o $\frac{E}{c^2}$. A wobec tego, że energię określa się zazwyczaj z dokładnością do stałej addytywnej, więc tę ostatnią możemy wybrać tak, aby zachodził związek:

$$E = Mc^2.$$



Aberracja światła, odkryta w 1726 r. przez astronoma angielskiego J. Bradleya, to zmiana położenia gwiazdy widzianej z Ziemi na skutek ruchu samej Ziemi. Aberracja roczna, uwarunkowana ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca, widoczna jest jako ruch gwiazdy po maleńkiej (jak to widać z Ziemi) orbicie eliptycznej. Aberrację można poglądowo wyjaśnić jako wynik (wektorowego) sumowania się prędkości światła gwiazdy i prędkości obserwatora (wraz z Ziemią).



Wobec tego, że $v \ll c$, gdzie c – wartość prędkości światła, więc $c_Z \approx c_S - v$ i kąt aberracji $\alpha = \frac{v}{c}$ (prawo Bradleya). Ten przybliżony wzór bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów, co oznacza, że w tym przypadku ($v \ll c$) wystarczającą dokładność obliczeń zapewnia klasyczna reguła składania prędkości Galileusza. Ponieważ dla $\frac{v}{c} \to 0$ transformacja Lorentza przechodzi w klasyczną transformację Galileusza, więc i wyrażenie na pęd ciała ma dla małych prędkości postać klasyczną. Związek $E = pc$, spełniony dla świetlnej paczki falowej, może być udowodniony za pomocą transformacji Lorentza i zasady względności bez uciekania się do równań Maxwella. Dowód jest elementarny, choć dosyć długi.