Z orbity na orbitę

*Grzegorz DERFEL**

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Wyobraźmy sobie wahadłowiec krążący wokół Ziemi po kołowej orbicie o promieniu r_1. Jego prędkość w tym ruchu v_1 można łatwo wyznaczyć, biorąc pod uwagę, że siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej, zakrzywiającej tor lotu wahadłowca, co można ująć równaniem

$$F_g = \frac{GMm}{r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1},$$

gdzie G jest stałą grawitacji, M masą Ziemi, a m masą wahadłowca. Wynika z tego, że

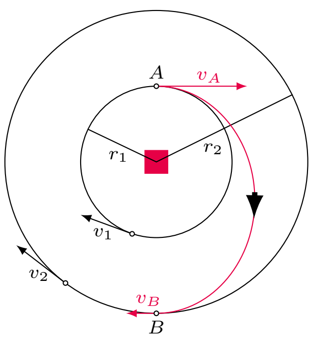
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}.$$

Załóżmy, że misja wahadłowca wymaga przejścia na inną kołową orbitę o większym promieniu r_2. Wzór analogiczny do powyższego przewiduje, że prędkość na tej nowej, większej orbicie będzie mniejsza:

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}.$$

Tymczasem, aby osiągnąć tę orbitę, wahadłowiec musi nie przyhamować, lecz zwiększyć prędkość ponad wartość v_1, co może wydać się dziwne.

Poniżej opisane są dwa sposoby przeprowadzenia takiej zmiany orbity.



Rys. 1. Przejście z orbity o promieniu r_1 na orbitę o promieniu $r_2 > r_1$ z zastosowaniem manewru Hohmanna

Pierwszy z nich znany jest jako manewr transferowy Hohmanna. Nazwa ta pochodzi od nazwiska Waltera Hohmanna, niemieckiego naukowca, który opisał go w roku 1925. Zmiana orbity składa się z kilku etapów przedstawionych na rysunku 1. W pewnym punkcie A orbity kołowej ciąg silników wahadłowca – zakładamy dla uproszczenia, że działają bardzo krótko – nadaje mu prędkość

$$v_A = kv_1 = k\sqrt{\frac{GM}{r_1}},$$

gdzie $k > 1$. Powoduje to zmianę kształtu orbity z okręgu w elipsę, której ognisko pokrywa się ze środkiem Ziemi. (Zakładamy, że intencją kosmonautów nie jest ucieczka w kosmos po paraboli lub hiperboli, więc $k < \sqrt{2}$.) Prędkość v_A powinna być tak dobrana, aby apogeum elipsy, tj. punkt B, znalazło się na planowanej orbicie kołowej. Zasada zachowania momentu pędu dla ruchu po tej elipsie wyraża się równością

$$mv_A r_1 = mv_B r_2,$$

więc w punkcie B wahadłowiec będzie miał prędkość

$$v_B = \frac{kv_1 r_1}{r_2}$$

mniejszą od v_A. Czynnik k określający wartość v_A, a także prędkość v_B można wyznaczyć z zasady zachowania energii zapisanej dla ruchu po elipsie. Zachowanie energii oznacza równość całkowitych energii w perigeum (punkt A) i apogeum (punkt B)

$$\frac{m{v_A}^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{m{v_B}^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}.$$

Stąd otrzymujemy

$$k = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}$$

oraz

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_1}\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \text{ i } v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_2}\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}.$$

Prędkość v_B jest mniejsza od v_2 odpowiadającej orbicie kołowej przechodzącej przez punkt B, dlatego aby przejść z orbity eliptycznej na kołową, wahadłowiec musi drugi raz przyspieszyć. Pierwsze przyspieszenie jest niezbędne, aby zastąpić kołową orbitę elipsą z apogeum w odległości r_2 od środka Ziemi, gdzie energia potencjalna jest większa niż w odległości r_1 i trzeba ją uzyskać kosztem

Rozwiązanie zadania F 1006.
Źródłem siły dośrodkowej utrzymującej szybką rotację powietrza wokół oka cyklonu jest różnica ciśnień w odległości r i $r + \Delta r$ od oka cyklonu. Rozważmy fragment strugi wiatru o szerokości Δr i powierzchni S w kierunku prostopadłym do promienia. Równowaga działających sił prowadzi do równania:

$$\frac{\rho S v^2 dr}{r} = S(p(r + dr) - p(r)) \approx S\frac{dp}{dr}dr.$$

Otrzymujemy:

$$v^2 \approx \frac{r}{\rho}\frac{dp}{dr}.$$

Dla oszacowania wartości pochodnej ciśnienia przyjmijmy, że ciśnienie w centrum wynosi 880 hPa, a na krańcu cyklonu, w odległości 250 km, wynosi 1010 hPa. Według naszego wzoru prędkość wynosi zero w centrum i rośnie z r. Z dala od centrum zmiany ciśnienia maleją i na krańcu cyklonu pochodna ciśnienia wynosi zero. Przyjmijmy, że maksymalna prędkość osiągana jest w odległości 50 km od centrum, i do obliczeń weźmy średnią wartość pochodnej p. Otrzymujemy:

$$v^2 \approx \frac{50\,000\ \mathrm{m} \cdot 130 \cdot 10^2\ \mathrm{Pa}}{2{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}} \approx 2167\ \mathrm{m^2/s^2},$$

a więc $v \approx 46{,}55$ m/s ≈ 168 km/godz. Maksymalny zarejestrowany poryw wiatru cyklonu Wilma osiągnął 295 km/godz., ale przez większość blisko dwutygodniowego „życia" tego cyklonu maksymalna prędkość wiatru wynosiła od 175 do 200 km/godz.

energii kinetycznej zwiększonej przyspieszającym działaniem silników. Drugie przyspieszenie jest konieczne, aby odrobić stratę prędkości powstałą podczas ruchu po elipsie od A do B. Wartości bezwzględne zmian prędkości wynoszą

$$\left|(k-1)\sqrt{\frac{GM}{r_1}}\right| \text{ w punkcie } A$$

oraz

$$\left|(k-1)\sqrt{\frac{GM}{r_2}}\right| \text{ w punkcie } B.$$

Suma ich modułów bywa używana jako miara wydatku energii niezbędnej do wykonania manewru, uzyskanej kosztem zużycia paliwa przez silniki. Czas przejścia, czyli czas lotu po połówce elipsy, można obliczyć ze wzoru

$$t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

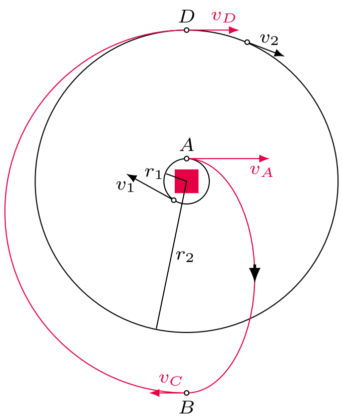
gdzie $a = \frac{r_1+r_2}{2}$ jest długością dużej półosi elipsy. Wzór ten wyraża połowę ujętego III prawem Keplera okresu obiegu po pełnej eliptycznej orbicie. Analogiczne rozważania dotyczą przejścia z orbity dalszej na bliższą Ziemi. Po przyhamowaniu następuje lot po trajektorii eliptycznej, która zbliża wahadłowiec do Ziemi. Druga redukcja prędkości zapewnia prędkość właściwą dla ruchu po planowanej orbicie kołowej.

Dla przykładu rozważmy przejście z orbity o promieniu $r_1 = 6700$ km na $r_2 = 33\,500$ km. Następowałoby ono dzięki przyspieszeniom od $v_1 = 7{,}71$ km/s do $v_A = 9{,}96$ km/s oraz od $v_B = 1{,}99$ km/s do $v_2 = 3{,}45$ km/s. Suma zmian prędkości wynosiłaby$\Delta v = 3{,}71$ km/s, a cały manewr trwałby 3 godziny i 56 minut.

Manewr Hohmanna przestaje być optymalny przy dużym stosunku promieni orbit $\frac{r_2}{r_1}$. Wtedy lepiej zastosować tzw. transfer dwueliptyczny, służący także do zmiany orbity mniejszej na większą i odwrotnie. Przejście z niskiej orbity o promieniu r_1 na wyższą o promieniu r_2 zilustrowane jest na rysunku 2.

Tak jak w manewrze Hohmanna, krótki impuls ciągu w punkcie A pierwotnej orbity zwiększa prędkość od v_1 do $v_A = kv_1$ (gdzie $k > 1$), dzięki czemu wahadłowiec wchodzi na orbitę eliptyczną. Jej kształt określony jest odległością a od ogniska (środek Ziemi) do apogeum (punkt B). Wielkość a, która musi być większa od r_2, powinna być wybrana z uwzględnieniem faktu, że decyduje o energii zużytej na wykonanie transferu i o czasie jego trwania. Podczas lotu po połowie elipsy od A do B prędkość w punkcie B spada do wartości v_B. W tym punkcie następuje kolejne impulsowe przyspieszenie do prędkości v_C, dobranej tak, aby wahadłowiec kontynuował lot po innej eliptycznej orbicie z apogeum w punkcie B i perigeum w punkcie D leżącym już na orbicie końcowej. Dążąc po tej elipsie do perigeum, wahadłowiec przyspiesza i do punktu D dociera z prędkością v_D. Jest ona większa niż v_2, a więc do przejścia na orbitę kołową o promieniu r_2 niezbędne jest hamowanie od v_D do v_2. Wzory wyrażające zasady zachowania pozwalają obliczyć poszczególne prędkości.

Jeśli zmiana orbity z $r_1 = 6700$ km na $r_2 = 33\,500$ km odbyłaby się drogą transferu dwueliptycznego z parametrem równym np. $50\,000$ km, to charakterystyczne prędkości wynosiłyby $v_A = 10{,}24$ km/s $v_B = 1{,}37$ km/s, $v_C = 2{,}53$ km/s i $v_D = 3{,}77$ km/s. Sumaryczna zmiana prędkości Δv przyjęłaby wartość $4,01$ km/s, co oznacza większe zużycie paliwa niż podczas transferu Hohmanna. Zmiana orbity zajęłaby także dużo więcej czasu, bo aż 44 godziny i 52 minuty. Ten przykład ilustruje główną wadę transferu dwueliptycznego, jaką jest długi czas jego realizacji. Manewr dwueliptyczny przeprowadzony z dowolnym $a > r_2$ jest oszczędniejszy od manewru Hohmanna, jeśli $\frac{r_2}{r_1} > 15{,}58$. Taką samą przewagę ma on, gdy $11{,}94 < \frac{r_2}{r_1} < 15{,}58$, pod warunkiem, że przeprowadza się go z dostatecznie dużą wartością a. Natomiast gdy $\frac{r_2}{r_1} < 11{,}94$, to żaden wariant transferu dwueliptycznego nie jest korzystniejszy od manewru Hohmanna. Różnice w zużyciu paliwa pomiędzy tymi dwiema procedurami są jednak niewielkie. Maksymalna oszczędność, jaką można uzyskać, zastępując manewr Hohmanna dwueliptycznym, wynosi 8%.



Rys. 2. Przejście z orbity o promieniu r_1 na orbitę o promieniu $r_2 > r_1$ z zastosowaniem transferu dwueliptycznego

Prędkość v_B przyjmuje wartość wynikłą z zachowania momentu pędu $v_B = \frac{kv_1r_1}{a}$. Zasada zachowania energii zastosowana dla drogi od A do B

$$\frac{m{v_A}^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{m{v_B}^2}{2} - \frac{GMm}{a}$$

pozwala powiązać parametry k i a tak, że $k^2 = \frac{2a}{a+r_2}$. Stąd

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_1}\frac{2a}{a+r_1}},$$

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{2r_1}{a+r_1}}.$$

Zachowanie momentu pędu i energii decyduje też o relacji między v_C i v_D takiej, że $v_c = \frac{v_Dr_2}{a}$. Otrzymuje się

$$v_C = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{2r_2}{a+r_2}},$$

$$v_D = \sqrt{\frac{GM}{r_2}\frac{2a}{a+r_2}},$$

przy czym $v_D > v_C$. Suma zmian prędkości wywoływanych pracą silników wynosi

$$\Delta v = |v_1 - v_A| + |v_B - v_C| + |v_D - v_2|,$$

a cały manewr trwa

$$t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} + \pi\sqrt{\frac{a_1^3}{GM}},$$

czyli tyle, ile lot po połówkach obu elips, gdzie $a_1 = \frac{a+r_2-r_1}{2}$.