Piękna fizyka: dlaczego $E = mc^2$, a gwiazdy świecą

*Paweł ARTYMOWICZ**

* University of Toronto

Albert Einstein udowodnił, że energia i masa są tak ściśle powiązane, że można płacić jedną za drugą, a współczynnikiem wymiany jest kwadrat prędkości światła. Czyż jest prostsza i piękniejsza zależność opisująca nasz świat? Dziwne tylko, że absolwent szkoły średniej, a nawet kończący studia fizyki nie potrafią w sposób elementarny udowodnić, że $E = mc^2$. Pora to zmienić. Przytoczę jedno z najprostszych wyprowadzeń. Opowiem też, jak wspaniale astronomia i fizyka pomogły sobie nawzajem w czasach Einsteina. Dzięki temu rozumiemy, jak Słońce nas oświetla i ogrzewa i jak długo jeszcze będzie to robić.

Dowód $E = mc^2$

Równanie Alberta Einsteina oparte na jego Szczególnej Teorii Względności (STW) ma bardzo wiele zastosowań. Pozwoliło Arturowi Eddingtonowi wyjaśnić, skąd gwiazdy biorą energię, którą promieniują. Opiera się o nie także zasada działania wszelkiego rodzaju bomb oraz wszystkich silników spalinowych, zmieniających w reakcji spalania drobną część masy paliwa i utleniacza w energię. Doskonale sprawdza się też w CERN pod Genewą, gdzie energia zamienia się w masę: fizycy produkują tam masę nowych cząstek (w obu znaczeniach słowa „masa") z energii zmiennego pola magnetycznego, przyspieszającego w akceleratorze cząstki trochę podobnie, jak pulsar wysyła w kosmos swe dwa strumienie promieni gamma i masywnych cząstek (przechodzących jedne w drugie w procesie kreacji i anihilacji).

W najprostszym przypadku, w procesie anihilacji pary cząstka-antycząstka powstaje para fotonów o równych energiach, poruszających się w przeciwnych kierunkach. Ich przeciwnie skierowane pędy sumują się do zera. Jeżeli pierwszy z pary fotonów porusza się do przodu wagonu, to drugi zaczyna poruszać się do tyłu, ale natychmiast odbija się od lustra. Po odbiciu oba fotony poruszają się więc do przodu, a wagon doznaje odrzutu i zaczyna poruszać się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu fotonów. Suma pędów wagonu i fotonów pozostaje równa zero.

Oto dowód elementarny, będący jednak w miarę ścisłym eksperymentem myślowym. Dokładnie takim, jakie uwielbiał przeprowadzać Einstein. W świecie bez tarcia i powietrza na szynach stoi wagon o masie M. Para cząstka-antycząstka o całkowitej masie m znajduje się początkowo na lustrze zawieszonym na tylnej wewnętrznej ścianie wagonu. Zachodzi anihilacja, cząstki znikają i pojawiają się fotony, które poruszają się z prędkością światła c od tyłu do przodu wagonu.

Niosą energię E anihilacji masy m oraz pęd $p = E/c$ (to właściwość fotonów znana już z równań elektrodynamiki Maxwella). Po czasie Δt fotony docierają do przedniej ściany, gdzie ich energia E z powrotem zmienia się w masę cząstek m. Emisji fotonów o pędzie p towarzyszy odrzut, ruch wagonu z pędem $-p$. Wagon przemieszcza się w czasie Δt do tyłu z prędkością $-p/M$, czyli $-E/(cM)$, a po uderzeniu fotonów w przednią ścianę zatrzymuje się. Nieruchomy środek masy układu leży w punkcie $x = (Mx_M + mx_m)/(M + m)$. Niech Δ oznacza różnicę między wielkościami na końcu i na początku eksperymentu. Zmiana położenia środka masy jest zerowa:

$$0 = (M + m)\Delta x = \Delta(Mx_M + mx_m) = M\Delta x_M + m\Delta x_m.$$

Współrzędne mas M i m zmieniają się w czasie Δt odpowiednio o: $\Delta x_M = -E/(cM)\Delta t$ oraz $\Delta x_m = c\Delta t$. Dlatego

$$0 = -(E/c)\Delta t + mc\Delta t,$$

czyli $E = mc^2$, c.b.d.o.

Einstein kontra Edison

Dwa lata po opisaniu w 1905 roku w dwóch artykułach teorii STW Albert Einstein zdawał egzamin habilitacyjny. Członek komisji zapytał kandydata dla żartu, czy umie udowodnić twierdzenie: $E = mc^2$, na co uczony odpowiedział: „Nie zapamiętałem dowodu. Ale wiem dokładnie, gdzie znaleźć na półce książkę, w której zostało to udowodnione". Czy to prawdziwa anegdota? Prawie na pewno tak! Einstein zawsze mawiał, że większością informacji nie warto zaprzątać pamięci, można je znaleźć w książkach. Gdy odwiedził po raz pierwszy słynny Uniwersytet Harvarda w Bostonie, w Ameryce budziła emocje kontrowersja wokół długiego kwestionariusza z pytaniami o mało istotne szczegóły z różnych dziedzin wiedzy, który wynalazca Thomas A. Edison dawał kandydatom do pracy w swej spółce, by sprawdzić, czy mają dobrą pamięć. Einstein zapytany o prędkość dźwięku (jedno z pytań testu) albo rzeczywiście nie pamiętał, albo udał że nie wie, by móc jeszcze raz powiedzieć: „Nie przechowuję takich informacji w moim umyśle, są dostępne w podręcznikach". Polemizując ze słabo wykształconym Edisonem, który ogłosił, że edukacja wyższa jest niepotrzebna, Einstein podkreślił, że tak nie jest: rozwija ona bowiem zdolności i ma nie tylko tę wartość, że uczy faktów, lecz że uczy, jak myśleć.

Rozwiązanie zadania M 1602.
Przyjmijmy $S_1 = [ABP]$, $S_2 = [DCP]$, $T_1 = [ADP]$, $T_2 = [BCP]$. Zauważmy, że

$$\frac{[ABP]}{[BCP]} = \frac{AC}{CP} = \frac{[ADP]}{[DCP]},$$

wobec czego $S_1S_2 = T_1T_2$. Wobec tego przekształcając równoważnie dowodzoną nierówność, mamy

$$\sqrt{S_1+S_2+T_1+T_2} \geqslant \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2},$$

$$S_1+S_2+T_1+T_2 \geqslant S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2},$$

$$T_1+T_2-2\sqrt{T_1T_2} \geqslant 0,$$

$$\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód.

Uwaga. Równość w udowodnionej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $T_1 = T_2$, czyli gdy $AB \parallel CD$.

Rozwiązanie zadania M 1600.
Korzystając dwukrotnie z warunku zadania, raz dla pary liczb (x, y), a drugi raz dla $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\frac{f(x)+f(y)}{2} &= \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{f(x)+f(y)}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha}{2}\cdot f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right)\\ &= \frac{\alpha}{2}\cdot f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}}{\alpha}\right)\\ &= \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\alpha}\\ &= f\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

Przydatne uogólnienie

Energia E w trakcie eksperymentu podróżowała jako bezmasowe promieniowanie (o zerowej energii spoczynkowej), którego pęd p i energia E spełniają

$$E = pc.$$

W ogólności, energia całkowita E to suma energii spoczynkowej mc^2 i energii związanej z pędem (kinetycznej), a w polach sił jeszcze też potencjalnej. Pomijając tę ostatnią, w STW udowadnia się, że dodawanie energii nie jest arytmetyczne, lecz „geometryczne”, tj. że

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2.$$

Uogólniony związek opisuje i cząstki masowe, i bezmasowe o dowolnym pędzie. Jest niesłychanie przydatny nie tylko w świecie atomowym, ale również w astrofizyce wysokich i niskich energii. W granicy małych pędów cząstek materii energia kinetyczna jest dużo mniejsza niż spoczynkowa: $pc \ll mc^2$. To domena mechaniki klasycznej, gdzie pęd definiuje się jako $p = mv$, a prędkość v spełnia $v \ll c$. Równanie upraszcza się wtedy do postaci asymptotycznej, gdzie energie sumują się arytmetycznie:

$$E \to mc^2 + p^2/2m.$$

[Czy umiecie to wykazać matematycznie? Spróbujcie udowodnić, że im x jest mniejsze, tym lepiej $(1+x)^{1/2}$ jest przybliżane przez $1 + x/2$]. Energia kinetyczna przybiera więc postać z fizyki newtonowskiej: $p^2/2m = mv^2/2$.

Astronomia dowodzi Teorię Względności

Teoria Einsteina pola grawitacyjnego jako efektu krzywizny czasoprzestrzeni, opublikowana w wersji ostatecznej w 1916 r. jako Ogólna Teoria Względności (OTW), miała z początku jeszcze więcej sceptyków niż jego STW. Dlatego gdy po wielu kłótniach w komitecie noblowskim Einsteinowi przyznano Nagrodę Nobla za rok 1921, w roku 1922 nagrodzono inne niż STW i OTW. Przez wiele lat traktowano OTW jako nieudowodnioną eksperymentalnie. Można to było zrobić obliczeniowo, tłumacząc niewyjaśnioną dotąd drobną część precesji orbity Merkurego, ale można było też podać bardziej przemawiający i bezpośredni dowód astronomiczny, obserwując przewidywany efekt soczewkowania grawitacyjnego, czyli ugięcia promieni świetlnych w kierunku masywnego Słońca. W czasie całkowitego zaćmienia Księżyc blokuje promienie słoneczne i widać na niebie pobliskie gwiazdy. Powinny one być widoczne w odległości nieznacznie większej od środka Słońca niż w katalogu czy na dokładnej mapie nieba. Pierwsza próba zaobserwowania zjawiska przez asystenta Obserwatorium Berlińskiego Erwina Freundlicha i Williama Campbella z kalifornijskiego Obserwatorium Licka podjęta była już w sierpniu 1914 roku w czasie zaćmienia na Krymie. Nie udała się: Amerykanin napotkał zachmurzenie, a Niemiec został aresztowany jako obywatel wrogiego państwa we właśnie rozpoczętej I wojnie światowej. Do decydującej próby odkrycia soczewkowania grawitacyjnego doszło w czasie całkowitego zaćmienia Słońca w 1919 r. Tym razem próbę obserwacyjną podjął z entuzjazmem znany astrofizyk angielski Artur S. Eddington. Po zapoznaniu się z teorią grawitacji w czasie wojny światowej, kiedy to naukowcy walczących ze sobą państw całkowicie odwrócili się od siebie, powodowani fałszywym uczuciem patriotyzmu, Eddington chciał włożyć swój wkład w jej empiryczne udowodnienie nie tylko jako wspaniałej teorii grawitacji. Chciał też pokazać, że nauka nie zna granic i ideologii. Einstein i Eddington byli osamotnionymi w swych środowiskach pacyfistami, pierwszy w Berlinie nie wziął najmniejszego udziału w wysiłku wojennym ze względu na przekonania, drugi w Cambridge ze względów religijnych. Eddingtonowi groziło wręcz aresztowanie przez rząd angielski. Organizacja ekspedycji i wyjazd do Afryki była więc ze wszelkich względów priorytetem dla dyrektora Obserwatorium w Cambridge. W dżungli, w zatoce Gwinejskiej na wyspie Principe, Eddington wraz z pomocnikami znów napotkali w ciągu pierwszych kilku minut chmury! Lecz w ciągu pozostałych paru minut zachmurzenie minęło. Trudne pomiary nielicznych dobrze naświetlonych klisz fotograficznych dały wkrótce pierwszy wynik pozytywny: Eddington zwracając się na zebraniu Naukowego Towarzystwa Królewskiego z przeprosinami w stronę portretu Newtona, oznajmił, że ustanowiono nową teorię grawitacji.

Rozwiązanie zadania M 1601.
Zauważmy, że skoro

$$\sphericalangle AMK + \sphericalangle ACK = \sphericalangle BML + \sphericalangle BCL = = 180^\circ,$$

to na czworokątach $ACKM$ oraz $BCLM$ można opisać okręgi. Wobec tego

$$\sphericalangle MCK = \sphericalangle MAK$$

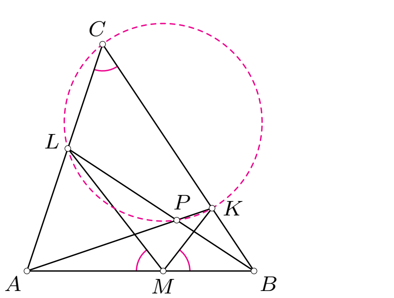
oraz

$$\sphericalangle MCL = \sphericalangle MBL,$$

a zatem

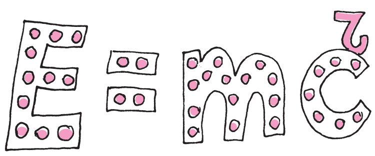
$$\sphericalangle KCL = \sphericalangle MAK + \sphericalangle MBL = = 180^\circ - \sphericalangle APB,$$

czyli ostatecznie $\sphericalangle KCL + \sphericalangle KPL = 180^\circ$.

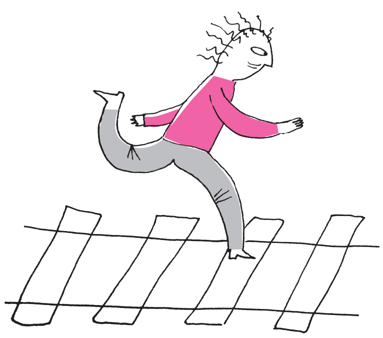


Teoria względności odwzajemnia się, wyjaśniając, dlaczego gwiazdy świecą

Gwiazdy były w końcowych dekadach XIX wieku trudnym orzechem do zgryzienia. Na przykład Słońce. Wiadomo było, jaką ma masę i promień, moc promieniowania i temperaturę powierzchni (5770 K). Ale nie wiadomo było poza tym prawie nic, ani z czego nasza gwiazda jest zrobiona (nieznany stan skupienia ani pełen skład chemiczny), ani jak stare jest Słońce, ani co powoduje, że świeci i grzeje. Istniała już matematyczna teoria struktury wewnętrznej gwiazd, przy pewnych założeniach co do ich materiału (materiał barotropowy, a dokładniej gaz politropowy). Wykazano w niej, że musi istnieć olbrzymia różnica (ściślej, gradient) temperatury, ciśnienia i gęstości materiału gwiazdy: bardzo wysokie wartości oszacowane całkiem poprawnie na 10 mln K w centrum, przy zaledwie tysiącach na powierzchni. Inaczej gwiazda by się zapadła. Czy taka temperatura, czyli przeskalowana energia termiczna, mogła wydzielić się w procesie powstawania gwiazdy, która tworzy się z materii rozproszonej, a kończy w małej objętości, w głębokiej studni potencjału grawitacyjnego? W zasadzie tak (hipoteza Kelvina–Helmholtza uwalniania energii grawitacyjnej wskutek kontrakcji). Było jednak kilka wielkich „ale".



Jeśli powstawanie Słońca i następnie powolne kurczenie się wydziela energię grawitacyjną zamienianą na światło, Słońce nie może być starsze niż około 20–30 mln lat, a inne, masywne gwiazdy nie mogłyby utrzymać się dłużej niż 30–70 tysięcy(!) lat. To nie było do zaakceptowania ani w biologii ewolucyjnej (już Charles Darwin rozumiał, jak wiele czasu zajmuje ewolucja biologiczna), ani paleontologii, ani w geologii, a zwłaszcza w używającej radioizotopów geochronologii powstałej po odkryciach Henriego Becquerela oraz Marii i Piotra Curie. W samej astronomii zaś czas kontrakcji Kelvina–Helmholtza też przeczył obserwacjom masywnych, pulsujących gwiazd zwanych Cefeidami. Takie gwiazdy promieniują ze znacznie większą mocą niż Słońce i musiałyby kurczyć się tak szybko, że zmieniałyby kolor (temperaturę powierzchni) co najmniej 150 razy szybciej, niż pokazywały obserwacje astronomiczne. Gwoździem do trumny hipotezy K–H okazało się datowanie radioizotopowe skał ziemskich, które „powiększały" wiek Ziemi. W roku 1921 zgodnie mówiono już o ponad miliardzie lat, okresie nareszcie zbieżnym z geologią i teorią ewolucji. No dobrze, ale co grzeje tak długo Ziemię i tak mocno i długo Słońce? Radioaktywność? W przypadku Ziemi to prawidłowa odpowiedź. Dla Słońca to niewystarczające źródło. Pojawiły się głosy, że jest to jakaś podobna energia subatomowa, wyzwalana z wnętrza atomu. Powoływał się na taki mechanizm grzania Słońca w 1919 roku Henry Russell, mówił też o tym Jean Perrin.



W 1920 roku przedstawił konkretne dowody nie kto inny, jak przyjaciel Einsteina Artur Eddington. Według niego hel, jedyny pierwiastek wykryty po raz pierwszy spektroskopowo poza Ziemią, to produkt syntezy wodoru w naszej gwieździe. Eddington użył wzoru $E = mc^2$, by wyjaśnić dokładne pomiary Francisa W. Astona mas pierwiastków chemicznych przy użyciu spektrometru masowego (Nagroda Nobla 1922 r.). Według tych pomiarów cztery jądra wodoru, od których synteza helu startuje, są nieco masywniejsze od produktu końcowego reakcji – jądra atomu helu – o 0,8% (dzisiejsza wartość to 0,71%). Tracona w reakcji termojądrowej część masy (mniej niż 1% masy wodoru) zamieniana jest, jak zrozumiał Eddington, na energię promieniowania i ciepło, utrzymując gwiazdy w równowadze. Gwiazdy świecąc, odrobinę „chudną". Zasoby wodoru są w nich tak duże, a transformacje pierwiastków tak nieefektywnie powolne, że gwiazdy podobne do naszej mogą przetwarzać wodór przez czas aż około 10 miliardów lat, dzięki czemu ewolucja doszła od jednokomórkowców do nas.

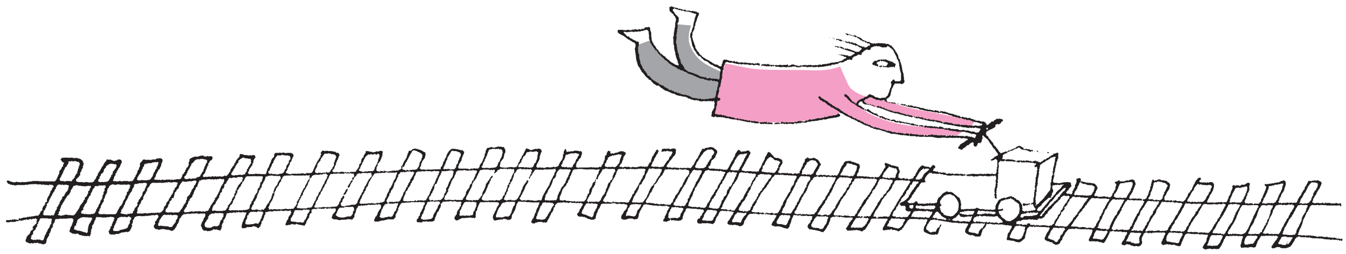
To łatwo wykazać. Masa Słońca, obliczona z okresu ruchu i odległości od Ziemi oraz zmierzonej w laboratorium stałej grawitacji, to $2 \cdot 10^{30}$ kg. Zaniedbując pewną wymianę materiału z resztą gwiazdy i gromadzenie się helu w gorącym jądrze gwiazdy, przyjmijmy, że tylko jądro o masie 1/5 masy Słońca bierze udział w produkcji energii. Oryginalnie 3/4 jego masy stanowił wodór, którego 0,7% znika w produkcji helu. $\Delta M \sim (1/5)(3/4)(0{,}007)2 \cdot 10^{30}$ kg jest zatem szacowanym ubytkiem masy wodoru. Całkowita energia, którą Słońce wyświeca jako normalna gwiazda, to $E = \Delta M c^2 \sim 1{,}9 \cdot 10^{44}$ J. Przy obecnej mocy promieniowania Słońca: $L \approx 3{,}9 \cdot 10^{26}$ J/s, energia E zapewnić może wyświecanie stałego strumienia L przez długi czas:

$$t = \frac{E}{dE/dt} = \frac{E}{L} \sim 15 \text{ mld lat.}$$

To górne oszacowanie, gdyż moc Słońca rośnie w czasie. Ma ono obecnie 4,6 mld lat, a stanie się coraz mocniej pulsującym czerwonym olbrzymem za kolejne 5 mld lat, aż zrzuci z siebie połowę masy. Jądro Słońca zostanie odsłonięte jako biały karzeł i zacznie ostygać. Niedawno zaobserwowano takiego nowo powstałego białego karła, gdzie wyłączyła się właśnie synteza termojądrowa. Ma bardzo wysoką temperaturę (300 tys. K), bliższą na skali logarytmicznej obecnej temperaturze wnętrza Słońca niż jego powierzchni. Ciekawe, co stanie się z Ziemią po przemianie Słońca w białego karła.

O powstawaniu pierwiastków pisaliśmy w Δ^5_{84} i Δ^7_{18}.

Opisanie zasadniczego mechanizmu działania gwiazd przez Eddingtona było jedynie początkiem badań reakcji termojądrowych, czyli inicjowanych przez wysoką temperaturę. Pojawiły się poważne wątpliwości: jak cztery jądra wodoru mogą zbliżyć się dostatecznie do siebie, by utworzyć jądro helu? Mają dodatni ładunek elektryczny i silnie się odpychają. Energia wymagana do ich zbliżenia i zetknięcia odpowiada temperaturze 10^3 razy większej niż istniejąca w środku Słońca. Zgodnie z fizyką klasyczną żaden proton w Słońcu nie może się zbliżyć dostatecznie blisko do innego protonu. W sukurs przyszła wtedy powstająca mechanika kwantowa. W 1928 roku, dwa lata po skończeniu studiów na Uniwersytecie Leningradzkim, Georgij Gamow zaproponował zjawisko tunelowania kwantowego jako podstawę zrozumienia klasycznie niemożliwych reakcji jądrowych. Dwie następne dekady zajęło naukowcom na całym świecie badanie skomplikowanych, wykorzystywanych przez gwiazdy dróg łączenia mniejszych jąder atomowych w większe. A od lat 60-tych aż do końca XX wieku trwało rozwiązywanie tzw. zagadki brakujących neutrin, cząstek produkowanych w czasie syntezy helu. Ale to osobne, ciekawe tematy.



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1600. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha \neq 0$. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y równanie
$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}.$$
Wykazać, że funkcja f spełnia dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y równanie
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Rozwiązanie na str. 9

M 1601. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym
$$\sphericalangle AML = \sphericalangle BMK = \sphericalangle ACB.$$
Odcinki AK i BL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty C, K, P, L leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie na str. 9

M 1602. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P. Wykazać, że
$$\sqrt{[ABCD]} \geqslant \sqrt{[ABP]} + \sqrt{[CDP]},$$
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.
Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 975. Badania sejsmologiczne pewnej planety o promieniu $R = 6370$ km pozwoliły ustalić, że rozkład masy w jej wnętrzu ma symetrię sferyczną, przy czym gęstość warstw powierzchniowych, aż do głębokości $H = 2900$ km, wynosi $\rho_m = 4{,}44$ g/cm^3. Głębsze warstwy mają gęstość $\rho_c = 11{,}00$ g/cm^3. W jakiej odległości od środka tej planety wartość jej siły przyciągania grawitacyjnego jest największa? Wartość stałej grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.
Wskazówka: Wewnątrz jednorodnej powłoki wypadkowa siła grawitacji jest równa zeru, a na zewnątrz powłoka przyciąga tak, jakby cała jej masa była skupiona w jej geometrycznym środku.
Rozwiązanie na str. 5

F 976. Zewnętrzne warstwy Ziemi to tzw. skorupa ziemska zbudowana ze skał o średniej gęstości $\rho_S = 2{,}8$ g/cm^3 i znajdujący się pod nią płaszcz ziemski o średniej gęstości skał $\rho_P = 3{,}3$ g/cm^3. Poniżej stałych zewnętrznych płyt tworzących powierzchnię Ziemi znajdują się warstwy płynne. O ile mniejsza jest grubość h warstwy skał skorupy ziemskiej pod oceanami od grubości H skorupy lądowej? Średnia głębokość oceanów wynosi $d = 3{,}7$ km, gęstość wody $\rho_W = 1{,}0$ g/cm^3. Zmiany wartości przyspieszenia ziemskiego można pominąć.
Rozwiązanie na str. 4