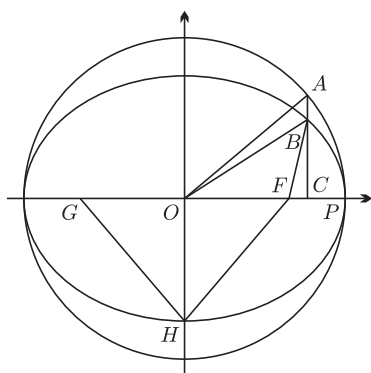


Johannes Kepler wyprowadził swoje pierwsze dwa prawa, analizując obserwacje Marsa wykonane przez Tycho Brahego. Po stuleciach obserwacji okresy orbitalne (lata) Ziemi i Marsa, T_Z i T_M , były wtedy znane bardzo dokładnie. Kepler przytomnie zauważył, że po upływie każdego swojego roku Mars znajduje się w tym samym punkcie przestrzeni, ale obserwowany jest z innego punktu ziemskiej orbity, jako że w tym czasie Ziemia obiega całą swoją orbitę i jeszcze dodatkowy łuk, którego długość łatwo obliczyć, znając różnicę obu okresów. Znając ów łuk, Kepler mógł wyznaczyć długość boku Z_1Z_2 trójkąta MZ_1Z_2 o wierzchołkach w początkowym położeniu Marsa M , początkowym położeniu Ziemi Z_1 oraz położeniu Ziemi po upływie marsjańskiego roku Z_2 . Kąty przy boku Z_1Z_2 były znane dzięki obserwacjom Brahego, co pozwoliło Keplerowi wyznaczyć przestrzenne położenie Marsa. Powtarzając procedurę dla innych punktów orbity Marsa, Kepler określił kształt całej tej orbity, łącznie z informacją o czasie przejścia przez każdy punkt. Tu był tylko o jeden krok od empirycznego stwierdzenia, że orbita jest elipsą, a Słońce znajduje się w jej ognisku (pierwsze prawo Keplera), i że linia łącząca Słońce z planetą, tzw. *promień wodzący*, zakreśla równą część pola orbity w równym czasie (drugie prawo Keplera). Dopiero potem Newton wykazał teoretycznie, że z jego praw dynamiki i prawa grawitacji wynikają prawa Keplera.



Wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny, czyli suma iloczynów odpowiednich współrzędnych, jest równy zeru.

Dyskusję zagadnienia ruchu planet w potencjale grawitacyjnym Słońca, czyli tzw. problem Keplera, zazwyczaj przedstawia się dopiero na poziomie studiów uniwersyteckich, mimo że nie wymaga ona używania skomplikowanych pojęć fizycznych ani zaawansowanej matematyki. W tym artykule postaramy się rozwiązać elementarnie problem Keplera – pokazując, że empiryczne prawa Keplera, opisujące ruch planet, są zgodne z prawami dynamiki Newtona.

Wyjdziemy od zwykłego jednostajnego ruchu po okręgu o promieniu a , umieszczając środek O tego okręgu w początku układu współrzędnych, tak jak na rysunku obok. Wektor wodzący \vec{OA} punktu A na okręgu można wówczas opisać jako $\mathbf{r}_c = (a \cos E, a \sin E)$, gdzie $E = \sphericalangle AOP$. Prędkość ruchu jest styczna do okręgu, a więc prostopadła do promienia, zatem $\mathbf{v}_c \equiv \dot{\mathbf{r}}_c = a\dot{E}(-\sin E, \cos E)$, gdzie przez \dot{E} oznaczamy tempo zmiany kąta E (prędkość kątową). Oczywiście, pole koła ograniczonego przez rozważany okrąg jest równe $S_c = \pi a^2$.

Jeżeli na płaszczyznę zawierającą opisany wyżej okrąg będziemy patrzeć nie „z góry”, ale „z ukosa”, zobaczymy nie okrąg, ale elipsę o wielkiej półosi a . Załóżmy, że patrzemy z takiego kierunku, że wskutek rzutowania współrzędne y ulegają skróceniu o czynnik b/a , gdzie b to długość OH , a współrzędne x nie zmieniają się. Oczywiście, zmniejszeniu o taki sam czynnik ulegną także składowa y prędkości oraz pole powierzchni elipsy względem odpowiednich wielkości dla okręgu:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{r}_e = (a \cos E, b \sin E), \\ (2) \quad & \dot{\mathbf{r}}_e = \dot{E}(-a \sin E, b \cos E), \\ (3) \quad & S_e = \pi ab, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{r}_e to wektor \vec{OB} . Kąt E nazywamy teraz *anomalią mimośrodową*. Ogniskami elipsy będą takie punkty F i G na osi x , że suma ich odległości od dowolnego punktu elipsy będzie stała i równa $2a$. Jeśli długości odcinków HF i HG są równe a , zaś długości odcinków OF i OG są równe ae , gdzie $e \in (0, 1)$, to z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OFH mamy

$$(4) \quad b = a\varepsilon,$$

gdzie

$$(5) \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{(1 - e)(1 + e)}.$$

Zauważmy, że rzutowanie zachowuje równoległość wektorów, ale prostopadłości już nie. Wynika stąd w szczególności, że rzutowana prędkość w A pozostaje styczna do toru w B , ale nie jest już prostopadła do OB .

Jeśli przeniesiemy układ współrzędnych do F (lub G), promień wodzący \mathbf{r}_+ (\mathbf{r}_-) otrzymamy, odejmując od \mathbf{r}_e wektor $\vec{OF} = (ae, 0)$ (lub $\vec{OG} = (-ae, 0)$), a prędkość zostanie ta sama:

$$(6) \quad \mathbf{r}_\pm \equiv (x, y) = a(\cos E \mp e, \varepsilon \sin E),$$

$$(7) \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}) = a\dot{E}(-\sin E, \varepsilon \cos E).$$

Powyższe wzory opisują tor zgodny z pierwszym prawem Keplera, tj. elipsę. Obliczając długości \mathbf{r}_\pm , łatwo przekonać się, że odległości FB i GB punktu B od ognisk F i G wynoszą

$$(8) \quad r_\pm = a(1 \mp e \cos E)$$

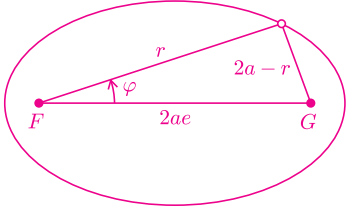
i ich suma rzeczywiście jest stała i równa $2a$. Ponadto, ze wzoru (8) wynika, że minimalna odległość od ogniska F , wynosząca $p = a(1 - e)$, jest osiągnięta w punkcie P

W *Epitome astronomiae Copernicanae* (V,2,3) Kepler wyjaśnia, że „choćby ściśle mówiąc, anomalia to niejednostajność, nieregularność w ruchu planety, astronomowie stosują ten termin do każdego ruchu, w którym pojawia się niejednostajność” (wiadomość od prof. J. Włodarczyka).

*Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika, Warszawa

Elipsa od sznurka do równania

Kepler, oczywiście, nie mógł używać kartezjańskiego układu współrzędnych. Dlatego też elipsę opisał w układzie współrzędnych biegunowych. Otrzymał go z najpopularniejszego sposobu rysowania tej krzywej: wbijamy w płaszczyznę dwie pinezki, do których przywiązujemy nitkę; napinając ją we wszystkich możliwych położeniach ołówkiem, otrzymujemy elipsę. Jeśli długość nitki jest równa $2a$, to odległość pinezek (ognisk elipsy) musi być równa $2ae$ dla pewnego $e \in (0, 1)$, bo inaczej nitka byłaby za krótka. Przy oznaczeniach z rysunku,



stosując twierdzenie cosinusów, otrzymujemy

$$r^2 + (2ae)^2 - 2r(2ae) \cos \varphi = (2a - r)^2,$$

czyli

$$r^2 + 4a^2e^2 - 4rae \cos \varphi = 4a^2 - 4ra + r^2.$$

Odejmując stronami r^2 i dzieląc przez $4a$, mamy

$$ae^2 - re \cos \varphi = a - r,$$

czyli

$$r(1 - e \cos \varphi) = a(1 - e^2) \quad \text{i} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}.$$

Stąd od razu wynikają wzory (6) i (8). [Red.]

dla $E = 0$; punkt ten nazywamy *perihelium*. Kosinus kąta między prędkością $\dot{\mathbf{r}}$ a promieniem wodzącym \mathbf{r}_{\pm} jest proporcjonalny do ich iloczynu skalarnego i odwrotnie proporcjonalny do długości każdego z tych wektorów. Skoro zaś $|\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\pm}|/r_{\pm} = e\dot{E} \sin E$, kąty te dla ognisk $+$ i $-$ są położone symetrycznie względem $\pi/2$. Wynika stąd w szczególności, że promień światła wysłany z jednego ogniska i odbity zgodnie z prawami optyki geometrycznej od elipsy trafi w drugie ognisko. W dalszych rozważaniach nie będziemy już się więcej zajmować ogniskiem G i opuścimy indeks $+$.

W sposób czysto empiryczny, porównując wartości okresów T i pól a , Kepler odkrył jako trzecie prawo, że a^3/T^2 jest stałe. Postać tej stałej znalazł dopiero Newton, pokazując, że

$$(9) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2},$$

gdzie G i M to stała grawitacji i masa Słońca. Dopiero z ostatniego wzoru tego artykułu przekonamy się, że właśnie taki wybór stałej jest poprawny. Jednak dla konkretnej planety T i a pozostają stałe i ich związek nie ma znaczenia w rozważaniach ruchu.

Dotąd nie zajmowaliśmy się czasem t , w którym jest osiągnany punkt B na elipsie, o ile znamy moment t_0 przejścia przez perihelium P . To zagadnienie Kepler rozwiązał w oparciu o prawo stałych pól. Cała powierzchnia elipsy $S_e = \pi ab$ jest zakreślana w czasie jednego okresu $T = 2\pi\sqrt{GM/a^3}$, stąd prędkość polowa to $\sigma = S_e/T = (ab/2)\sqrt{GM/a^3}$. Na podstawie prawa pól Kepler przyjął, że pole S_{BFP} wycinka elipsy zawartego w $\sphericalangle BFP$ jest proporcjonalne do przedziału czasu: $S_{BFP} = \sigma(t - t_0)$. Następnie zauważył, że $S_{BOP} - S_{\Delta BOF} = S_{BFP}$. To równanie Keplera było kluczem do rozwiązania problemu. Wycinek elipsy BOP jest rzutem wycinka koła AOP , stąd jego pole jest równe $S_{BOP} = (b/a)S_{AOP}$. Z wyznaczeniem pola trójkąta BOF o znanych współrzędnych wierzchołków uczoney poradził sobie bez trudu i ostatecznie przedstawił (w 1619 roku) równanie w postaci

$$(10) \quad E - e \sin E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - t_0) \equiv N,$$

gdzie kąt N jest zwany *anomaliami średnią*, a stała proporcjonalności została uwspółcześniona. Czytelnik Wnikliwy może sprawdzić, jaki to stały czynnik uczoney uprościł w polach, podając wzór w postaci (10). Ponieważ po okresie obiegu T lewa strona równania (10) rośnie o 2π , zatem to samo robi prawa strona: $N = 2\pi(t - t_0)/T$. Równanie Keplera nie ma rozwiązania analitycznego, ale dla danego N wartość rozwiązania E można szybko obliczyć metodą Newtona. Przyjmując pierwsze przybliżenie rozwiązania, np. jako $E_0 = 0$ lub $E_0 = \pi$, następane otrzymuje się ze wzoru

$$(11) \quad E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - N}{1 - e \cos E_n}.$$

Dla rosnącego n iteracje są szybko zbieżne do prawdziwego rozwiązania E spełniającego zależność (10).

Posłużymy się równaniem Keplera do obliczenia chwilowej prędkości kątowej \dot{E} , a stąd prędkości liniowej $\dot{\mathbf{r}}$. W tym celu zastanówmy się nad prędkością zmian każdej ze stron wzoru (10). Czynnikiem z pierwiastkiem jest stały, mamy więc do czynienia z „ruchem jednostajnym” z prędkością $\dot{N} = \sqrt{GM/a^3}$. Po lewej stronie wzoru (10) prędkość zmian E jest po prostu \dot{E} . Pozostaje zatem określić prędkość zmian wyrazu $e \sin E$. Wybierzmy sobie punkt o współrzędnej $s = \sin E$. W czasie ruchu stosunek tej współrzędnej do y na elipsie pozostaje stały: $s/y = \sin E/(ae \sin E) = 1/(ae)$. Zatem stosunek tempa ich zmian w czasie \dot{s}/\dot{y} musi być identyczny, więc ze wzoru (7), $\dot{s} = \dot{y}/ae = \dot{E} \cos E$. Mnożenie przez e odpowiada jedynie zmianie jednostek, zatem prędkość zmian $e \sin E$ wynosi $e\dot{s} = e\dot{E} \cos E$. Podsumowując rozważania o prędkościach zmian obu stron równania Keplera, otrzymujemy:

$$\dot{E} - e\dot{E} \cos E = \sqrt{GM/a^3}.$$

Zatem

$$(12) \quad \dot{E} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Po drodze otrzymaliśmy użyteczny wzór na \dot{s} . Postępując podobnie dla $w = \cos E$ i zmian położenia x , otrzymujemy odpowiednio:

$$(13) \quad \dot{s} = \dot{E} \cos E,$$

$$(14) \quad \dot{w} = -\dot{E} \sin E.$$



Czytelnik Wnikliwy zakrzyknie zaraz ze zgrozą, że przed chwilą po prostu wykonaliśmy różniczkowanie. Prawda to, ale korzystaliśmy tu nie tyle z rachunku różniczkowego, co z intymnego związku pochodnej z prędkością. Podstawiając wzór (12) do (7), otrzymujemy

$$(15) \quad \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \left(\frac{-\sin E}{1 - e \cos E}, \frac{\varepsilon \cos E}{1 - e \cos E} \right).$$

Moment pędu planety o masie m to $j = mrv_{\perp}$, gdzie v_{\perp} jest składową prędkości prostopadłą do \mathbf{r} . W bardzo krótkim przedziale czasu Δt ruch planety może być traktowany jako prostoliniowy z przesunięciem $\mathbf{v}\Delta t$, tak że zakreślony obszar jest wydłużonym trójkątem o boku \mathbf{r} i wysokości $v_{\perp}\Delta t$. Jego pole to $\Delta S = rv_{\perp}\Delta t/2$, zatem prędkość polowa $\sigma = rv_{\perp}/2 = j/(2m)$. A zatem keplerowskie prawo stałych pól odpowiada newtonowskiemu prawu zachowania momentu pędu, gdy działająca siła nie ma składowej prostopadłej do promienia.

Dla $e = 1$ wzór (6) załamuje się, bo $\varepsilon = 0$, zatem zawsze $y = 0$, chyba że a staje się wielkie: $a \rightarrow \infty$. Ponadto we wzorze (12) dla $E = 0$ prędkość kątowna staje się wielka, $\dot{E} \rightarrow \infty$. By uniknąć tych problemów, wyrazimy $\sin E$ i $\cos E$ poprzez składowe jednostkowego wektora kierunkowego $(x/r, y/r)$. Ze wzorów (6) i (8) mamy $x/r = (\cos E - e)/(1 - e \cos E)$ i podobnie $y/r = \varepsilon \sin E/(1 - e \cos E)$. Rozwiązując względem $\cos E$ oraz $\sin E$, mamy

$$(16) \quad \cos E = \frac{\frac{x}{r} + e}{1 + e \frac{x}{r}},$$

$$(17) \quad \sin E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{y}{r} (1 - e \cos E).$$

Teraz możemy podstawić (16) i (17) do wzoru (15), otrzymując

$$(18) \quad \dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{GM}{q(1+e)}} (-\sin \nu, \cos \nu + e),$$

gdzie zamiast a mamy $q = a(1 - e)$, a potęgi $1 - e$ uprościliśmy. Przy tym nowy kąt $\nu = \sphericalangle BFP$, zwany *anomalią prawdziwą*, wybrano tak, by $\cos \nu = x/r$ i $\sin \nu = y/r$. Taki wzór na prędkość to równanie parametryczne okręgu o środku przesuniętym o e względem środka układu. W tym wzorze nie dzieje się nic osobliwego dla $e = 1$ i można oczekiwać, że stosuje się on do ruchu keplerowskiego po paraboli $e = 1$ i po hiperboli $e > 1$. Przy tym dla paraboli początek układu $(0, 0)$ leży na obwodzie, czyli prędkość dąży do 0 dla $\nu \rightarrow \pi$. Natomiast dla $e > 1$ początek leży poza okręgiem prędkości, zatem prędkość nigdy nie spada do zera, a jej kierunek musi się zawierać w kącie ograniczonym stycznymi do okręgu wyprowadzonymi z początku układu. Z zachowania prędkości polowej wynika, że w perihelium, dla $\nu = 0$, prędkość ma być największa – zatem tylko dalsza od początku część okręgu pomiędzy stycznymi odpowiada rzeczywistemu ruchowi po hiperboli.

Przyspieszenie $\ddot{\mathbf{r}}$ to szybkość zmiany prędkości $\dot{\mathbf{r}}$. Jedyną wielkość zmienną we wzorze (18) to ν , zatem, wykorzystując równania (14) i (13) dla prędkości zmian tej wielkości, mamy $\ddot{\mathbf{r}} = \sqrt{GM/q(1+e)} (-\dot{\nu} \cos \nu, -\dot{\nu} \sin \nu)$. Prędkość kątowną $\dot{\nu}$ trzeba wyznaczyć z prędkości polowej $2\sigma = rv_{\perp}$, gdzie po prostu $v_{\perp} = r\dot{\nu}$. Mamy zatem $2\sigma = r^2\dot{\nu}$, stąd $\dot{\nu} = 2\sigma/r^2$ i ostatecznie

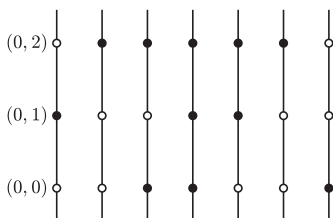
$$(19) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right).$$

W ten sposób powtórzyliśmy dowód Newtona, że prawa Keplera wymagają ruchu z przyspieszeniem proporcjonalnym do $1/r^2$ i skierowanym do obieganego ciała w ognisku elipsy. To, że siła ma być proporcjonalna do m/r^2 , gdzie m to masa planety, wynika z drugiego prawa dynamiki, natomiast proporcjonalność do masy M Słońca (drugiego ciała) wynika z trzeciej zasady dynamiki i założenia symetrii prawa grawitacji względem obu przyciągających się ciał.

W całych rozważaniach popełniliśmy dwie niedokładności: zaniedbaliśmy ruch Słońca wokół środka masy układu dwóch ciał oraz przyciąganie innych planet. Z prawa ciążenia powszechnego wynika przyciąganie się wszystkich ciał układu słonecznego, a nie tylko Słońca i danej planety. Pomijając to, popełniliśmy błąd, wskutek którego rzeczywiste położenie planety na niebie może oscylować względem obliczonego o wielkość tarczy Księżyca. W rachunkach bardziej ścisłych oblicza się poprawki do przestrzennej orbity keplerowskiej lub dopasowuje się chwilową orbitę keplerowską styczną do prawdziwej, zwaną *orbitą oskulacyjną*. Oczywiście, jej parametry będą się nieco różnić od wyjściowych i będą również zmieniać się w czasie.



Rozwiązanie zadania M 1312.
Wyróżniamy dwadzieścia jeden punktów kratowych $(j, 0)$, $(j, 1)$, $(j, 2)$ dla $j = 0, 1, \dots, 6$.



Powiemy, że na danej prostej $x = j$ dominuje kolor a , jeśli co najmniej dwa spośród trzech wyróżnionych punktów na tej prostej są koloru a . Istnieją cztery proste, na których dominuje ten sam kolor – przyjmijmy, że biały. Możemy wybrać z nich taką parę, że albo przynajmniej jedna nie ma czarnego wyróżnionego punktu, albo obie mają po jednym na tej samej wysokości. Wśród białych wyróżnionych punktów na tych dwóch prostych są wierzchołki prostokąta.