Pułapka z fal grawitacyjnych

Szymon CHARZYŃSKI

Nikogo prawdopodobnie nie dziwi fakt, że gdy wyrzucimy jakiś przedmiot, np. piłkę, to tor jego lotu nie będzie linią prostą, tylko zakrzywi się w stronę Ziemi. Interpretujemy to jako konsekwencję oddziaływania grawitacyjnego między tym obiektem a Ziemią. Większość ludzi wie (aczkolwiek ciągle aktywni są przeciwnicy tej tezy), że Ziemia, tak jak inne planety Układu Słonecznego, krąży po orbicie wokół Słońca. Podobnie satelity krążą wokół Ziemi, która zakrzywia tor ich ruchu, tak samo jak zakrzywia tor lotu piłki. Nie dziwi więc nas, że coś krąży wokół jakiegoś masywnego obiektu. Mierząc parametry orbit gwiazd krążących po eliptycznych orbitach w okolicy centrum naszej Drogi Mlecznej, astronomowie wyliczyli masę czarnej dziury, która się znajduje w samym centrum. Mimo że jej nie widać, to wnioskujemy, że musi tam być, bo widzimy gwiazdy, które krążą wokół niej. Takie krążące po orbitach obiekty są w tzw. stanie związanym – nie mogą uciec od centrum przyciągania.

A czy w pustej przestrzeni, w której nie ma żadnego masywnego obiektu, grawitacja może sprawić, że cząstka będzie krążyć? Wydaje się to sprzeczne z intuicją, ale najnowsze prace teoretyczne wskazują na to, że pewne konfiguracje fal grawitacyjnych mogą zmusić masywne cząstki do krążenia wokół pewnej osi (wyróżnionej przez tę falę). Fale grawitacyjne same w sobie są bardzo trudno uchwytne, jak więc to możliwe, że pewne konfiguracje takich fal mogą pułapkować cząstki? Co wyróżnia te konfiguracje i czy mogą one być wytwarzane gdzieś we Wszechświecie?

Na naszym kanale DeltamiEduPl na YouTube pod filmem prezentującym prosty argument za tym, że Ziemia nie jest płaska (youtu.be/PUfrFoxd2_A), rozpętała się swego czasu gorąca dyskusja.

Skąd się biorą fale grawitacyjne?

Czternastego września 2015 roku w Stanach Zjednoczonych dwa detektory LIGO zarejestrowały po raz pierwszy w historii fale grawitacyjne, o czym pisaliśmy w Δ^4_{16}. W 2017 roku za odkrycie to Nagrodą Nobla zostali uhonorowani Rainer Weiss, Barry C. Barish i Kip S. Thorne. Nie była to jednak pierwsza Nagroda Nobla związana z falami grawitacyjnymi. W 1993 roku otrzymali ją Russell A. Hulse i Joseph H. Taylor za obserwacje odkrytego przez nich w 1974 roku pulsara PSR 1913 + 16, które otworzyły nowe możliwości badania grawitacji i dostarczyły pierwszych pośrednich dowodów wskazujących na istnienie fal grawitacyjnych.

To, co łączy obserwacje pulsara Hulse'a–Taylora i detekcje LIGO–Virgo (po pierwszej, oznaczanej GW150914, było kilkanaście kolejnych), to fakt, że dotyczą układów podwójnych, których opis w teorii grawitacji Newtona jest bardzo prosty. W teorii grawitacji Newtona, składniki układu (takiego jak np. Ziemia–Księżyc) okrążają środek masy układu po orbitach eliptycznych (lub w szczególnym przypadku kołowych). Całkowita energia takiego układu oraz całkowity moment pędu związany z ruchem orbitalnym są stałe w czasie. Do tego prostego newtonowskiego obrazka Ogólna Teoria Względności Einsteina (OTW) wnosi istotne poprawki, o czym pisałem szerzej w Δ^{12}_{15}.

Przewidywane przez OTW promieniowanie grawitacyjne (nie występujące w teorii Newtona) unosi energię z układu podwójnego, czego skutkiem jest „spadanie" na siebie składników układu, czyli stopniowe zacieśnianie się orbit i skracanie okresu obiegu. Pulsar obserwowany przez Hulse'a i Taylora ma towarzysza o podobnej masie, czyli jest jednym ze składników układu podwójnego. Dokładne pomiary parametrów jego orbity (o których więcej pisał „nasz człowiek" w zespole LIGO-Virgo, Michał Bejger, w Δ^{12}_{15}) przeprowadzone w latach 1974–1978 wykazały, że okres jego obiegu skraca się, czyli składniki układu spadają na siebie, a więc promieniowanie grawitacyjne unosi z układu energię. Pomiary dokładnie zgadzały się z przewidywaniami OTW.

Zbliżanie się do siebie składników układu podwójnego oznacza również zmniejszanie orbitalnego momentu pędu układu. Promieniowanie grawitacyjne unosi więc nie tylko energię, ale także moment pędu. Fala grawitacyjna jest falą poprzeczną, może więc mieć *spinowy* moment pędu związany z polaryzacją lub *orbitalny* moment pędu związany z kształtem frontu falowego (o czym więcej pisałem w Δ^2_{18}). Tutaj szczególnie będzie nas interesować orbitalny moment pędu fali grawitacyjnej. Można obliczyć, że w pobliżu układu podwójnego promieniowanie grawitacyjne przez niego wytwarzane niesie orbitalny moment pędu. Oznacza to, że w przyrodzie występują naturalne źródła tego rodzaju promieniowania.

Rozwiązanie zadania M 1621.
Wykażemy, że każda dodatnia liczba całkowita n mogła zostać uzyskana (poprzez ciąg kilku kolejnych dopisywań) z pewnej mniejszej liczby. Stąd dostaniemy odpowiedź twierdzącą na postawione w zadaniu pytanie.
Liczbę dającą resztę 1 z dzielenia przez 3, powiedzmy $3k+1$, można uzyskać w jednym kroku z liczby k. Liczba dająca resztę 2 z dzielenia przez 3, powiedzmy $3k+2$, może zostać uzyskana w dwóch krokach z liczby $2k+1$: w pierwszym kroku dopisujemy liczbę $6k+4$. Wreszcie liczba podzielna przez 3, powiedzmy $3k$, może zostać uzyskana w siedmiu krokach z liczby k: w kolejnych pośrednich krokach dopisujemy $2k$, $4k$, $12k+1$, $36k+4$, $18k+2$, $9k+1$.

Od pułapek elektromagnetycznych do grawitacyjnych

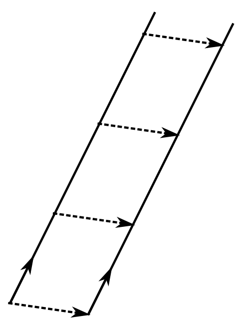
Fale elektromagnetyczne posiadające orbitalny moment pędu pułapkują cząstki naładowane wokół tzw. osi wirowej, wokół której fala wiruje. Ruch złapanej cząstki wygodnie jest opisywać, wyróżniając dwie skale czasowe. W małej skali cząstka oscyluje z częstością fali. Amplituda tych oscylacji jest mała. W dużej skali czasowej obserwuje się powolne zmiany średniego położenia cząstki, wokół którego wykonuje ona szybkie oscylacje o małej amplitudzie. Zmiany średniego położenia można opisać, wprowadzając uśrednioną efektywną siłę, która ściąga cząstkę do osi fali i działa tak samo na cząstki o ładunku dodatnim i ujemnym (co może być zaskakujące). Niezależnie od ładunku cząstki są „łapane" w kierunkach prostopadłych do osi wirowej i wykonują wokół niej oscylacje (patrz Δ^3_{18}).

Skoro fale elektromagnetyczne mają taką własność, to naturalnie nasuwa się pytanie, czy fale grawitacyjne niosące orbitalny moment pędu również będą pułapkować cząstki wokół osi wirowej. Odpowiedź na to pytanie okazuje się pozytywna, co zostało pokazane w pracy [∗].

[∗] Iwo Białynicki-Birula, Szymon Charzyński, *Trapping and Guiding Bodies by Gravitational Waves Endowed with Angular Momentum*, Phys. Rev. Lett. 121, 171101 (2018).

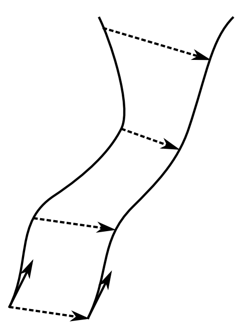
Ruch cząstki swobodnej w zakrzywionej czasoprzestrzeni

OTW opisuje grawitację jako zakrzywienie czasoprzestrzeni. Cząstka swobodna porusza się w takiej czasoprzestrzeni po tzw. linii *geodezyjnej*. W geometrii euklidesowej, której uczymy się w szkole, geodezyjne to odcinki prostych. Natomiast na sferze geodezyjnymi są odcinki okręgów wielkich (trójkąty budowane z takich odcinków mają sumę kątów większą niż 180°). Ogólnie w geometrii Riemanna geodezyjne to linie lokalnie najkrótsze (patrz na przykład artykuł Witolda Mozgawy Δ^9_{19}). W OTW (jest to tzw. geometria pseudoriemannowska) geodezyjna lokalnie maksymalizuje czas własny. Dlatego właśnie zegary na satelitach systemu GPS chodzą szybciej (patrz Δ^{11}_{19}) niż te na powierzchni Ziemi. Satelita porusza się swobodnie, nie doznając żadnych przyspieszeń, czyli po geodezyjnej. Natomiast zegar stojący na Ziemi doświadcza stałego przyspieszenia $g \approx 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ i nie porusza się po linii geodezyjnej.



Rys. 1. Dwie bliskie geodezyjne startujące równolegle w płaskiej przestrzeni

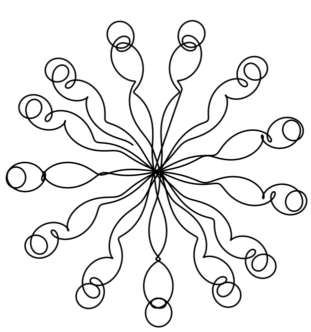
Żeby zobaczyć, jak fala grawitacyjna wpływa na cząstki swobodne, trzeba znaleźć geodezyjne cząstek w czasoprzestrzeni, zawierającej interesującą nas falę grawitacyjną. Najbardziej przemawiający i przekonujący obraz daje porównanie bliskich sobie trajektorii cząstek.



Rys. 2. Dwie bliskie geodezyjne startujące równolegle w zakrzywionej przestrzeni

Dewiacja geodezyjna

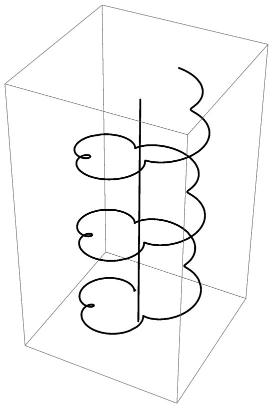
Wyobraźmy sobie dwie cząstki startujące z dwóch różnych punktów z takimi samymi prędkościami (ten sam kierunek i ta sama wartość prędkości). Geometrycznie odpowiada to dwóm geodezyjnym startującym z dwóch różnych punktów w równoległych kierunkach. W płaskiej przestrzeni euklidesowej takie linie pozostaną na zawsze równoległe, jak na rysunku 1. W przestrzeni zakrzywionej nie musi tak być. To, jak zmienia się odległość między dwiema bliskimi geodezyjnymi i kierunek wektora łączącego punkty na tych geodezyjnych, opisuje tzw. *równanie dewiacji geodezyjnej*. Gdyby przestrzeń była płaska, czyli krzywizna byłaby równa zero, to wektor łączący punkty na dwóch geodezyjnych, które początkowo były równoległe, byłby stały, czyli dwie cząstki wystrzelone równolegle z tymi samymi prędkościami leciałyby w stałej odległości od siebie. Obecność krzywizny powoduje, że wektor ten zmienia się w miarę przesuwania się po krzywej. Oznacza to, że w zakrzywionej czasoprzestrzeni cząstki wystrzelone równolegle mogą z czasem zacząć się oddalać albo przybliżać do siebie (rys. 2).



Rys. 3. Przykładowe rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnej. Rzut trajektorii cząstki na płaszczyznę prostopadłą do osi wiązki

Ruch cząstek w polu fali grawitacyjnej z orbitalnym momentem pędu

W optyce przykładem fal elektromagnetycznych niosących orbitalny moment pędu i w związku z tym wykorzystywanych do pułapkowania cząstek są tzw. wiązki Bessela. W ich opisie występują funkcje specjalne, które wzięły swą nazwę od niemieckiego astronoma, geodety i matematyka Friedricha Wilhelma Bessela. Okazuje się, że istnieją rozwiązania zlinearyzowanej OTW (opisującej słabe pola grawitacyjne) posiadające własności analogiczne do elektromagnetycznych



Rys. 4. Przykładowe rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnych. Jedna cząstka porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi wiązki. Druga cząstka krąży wokół tej osi. Warunki początkowe są tak dobrane, że ruch jest dokładnie okresowy

wiązek Bessela, które zostały nazwane *grawitacyjnymi wiązkami Bessela*. Wiązka taka w pewnym otoczeniu osi wirowej ma również podobne własności, jak fala grawitacyjna emitowana przez układ podwójny w otoczeniu osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny orbitalnej układu (w pewnym zakresie odległości). W odróżnieniu jednak od fali emitowanej przez układ podwójny wiązka Bessela ma znacznie prostszy opis matematyczny, pozwalający na ścisłe analityczne rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnej.

W czasoprzestrzeni opisywanej przez pewną konkretną wiązkę Bessela oś wirowa fali jest geodezyjną, czyli cząstka swobodna może poruszać się dokładnie po tej osi, z dowolną stałą prędkością. Rozwiązując równanie dewiacji geodezyjnej wokół tej geodezyjnej, możemy zobaczyć, jak będą poruszać się cząstki w jej otoczeniu. Analityczne rozwiązania tego równania przedstawione są na rysunku 3. Widać, że trajektorie cząstek oscylują wokół osi wirowej fali, cząstki pozostają więc „złapane” w jej otoczeniu – nawet jak się oddalają, to potem zawracają. Można w dodatku tak dobrać warunki początkowe, żeby dostać ruch dokładnie okresowy, jak na rysunku 4.

Czy to ma jakieś zastosowanie praktyczne?

Poprzedni numer *Delty* był w całości poświęcony przykładom nieoczekiwanych zastosowań praktycznych wyników abstrakcyjnych badań podstawowych. Wyniki tutaj referowane są na razie czysto teoretyczne. Taka matematyczna ciekawostka. Nie wiadomo nawet, czy zjawisko to da się zaobserwować w jakimś eksperymencie, ani czy występuje ono w jakichś procesach astrofizycznych. Na razie można tylko spekulować. Może ma jakieś znaczenie w tworzeniu galaktycznych dżetów, czyli strumieni materii wyrzucanych prostopadle do dysku aktywnej galaktyki, wzdłuż osi jej obrotu? Na razie ciągle zbyt mało wiemy o tym efekcie, ale badania trwają.

Średnie w zawodach studenckich

Bartosz BIEGANOWSKI, Aurelia DYMEK*, Daniel STRZELECKI**

* doktoranci, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Autorzy brali udział w takich zajęciach – prowadzonych przez doktora Roberta Skibę na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, oraz startowali m. in. w zawodach Vojtěch Jarník International Mathematical Competition w Ostrawie (Czechy), International Mathematical Competition for Students w Błagojewgradzie (Bułgaria) oraz North Countries Universities Mathematical Competition w Sankt Petersburgu (Rosja) Challenges.

Czytelnicy *Delty* zapewne znają zawody matematyczne dla uczniów, takie jak Olimpiada Matematyczna lub Kangur Matematyczny. Nie wszyscy wiedzą jednak, że konkursowe zmagania można kontynuować również podczas studiów. Na niektórych uczelniach odbywają się nawet specjalne zajęcia, podczas których rozwiązuje się i omawia zadania konkursowe.

Przyjrzyjmy się bliżej często używanemu podczas zawodów studenckich twierdzeniu o wartości średniej, przypisywanemu Lagrange'owi. Stwierdza ono, że dla funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i różniczkowalnej w przedziale (a,b) istnieje punkt c w przedziale (a,b) taki, że

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Inaczej mówiąc, przyrost wartości funkcji wyraża się przez przyrost wartości zmiennej i pochodną funkcji w pewnym punkcie pośrednim.

Równie przydatne jest uogólnienie powyższego twierdzenia, znane jako twierdzenie Cauchy'ego. Mianowicie, dla funkcji ciągłych $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i różniczkowalnych w przedziale (a,b) istnieje punkt c w przedziale (a,b) taki, że

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Zauważmy, że biorąc w twierdzeniu Cauchy'ego funkcję $g(x) = x$ dla każdego x, uzyskujemy twierdzenie Lagrange'a.

Okazuje się, że z twierdzenia Lagrange'a można wyprowadzić twierdzenie Cauchy'ego. Zachęcamy Czytelnika do próby przeprowadzenia tego rozumowania.

Jesteśmy gotowi, aby zastosować powyższe twierdzenia do rozwiązywania zadań z międzynarodowych zawodów dla studentów. Rozważmy różniczkowalną funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$ taką, że $|f'(x)| \neq 1$ dla wszystkich x z przedziału $[0,1]$.