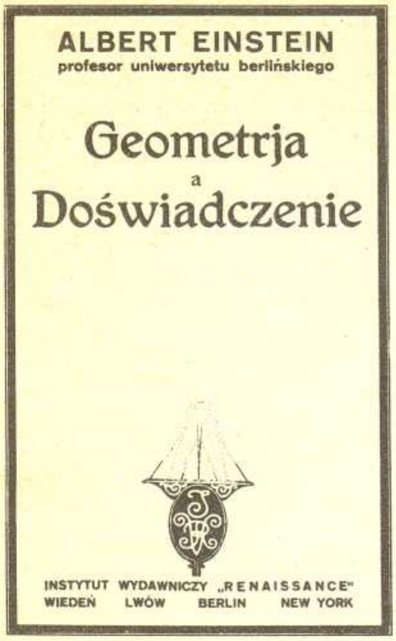
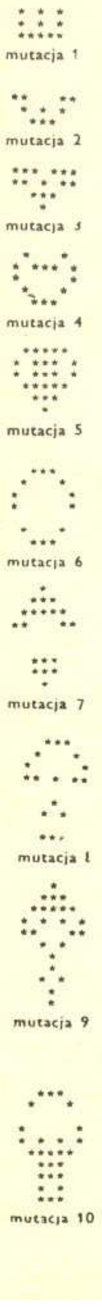

ALBERT EINSTEIN
profesor uniwersytetu berlińskiego

Geometrja
a
Doświadczenie

INSTYTUT WYDAWNICZY „RENAISSANCE"
WIEDEŃ LWÓW BERLIN NEW YORK



Geometria a doświadczenie

Albert EINSTEIN

(*Artykuł napisany w latach dwudziestych naszego stulecia i przetłumaczony przez prof. dr Gottfryda. Dokonaliśmy jedynie drobnych zmian słownictwa i pisowni.* (*Red.*))

Spośród wszystkich innych nauk matematyka przede wszystkim z jednego powodu cieszy się szczególnym poważaniem: jej twierdzenia są bezwzględnie pewne i niezaprzeczalne, podczas gdy twierdzenia wszystkich innych nauk są do pewnego stopnia przedmiotem sporu i wciąż narażone na obalenie wskutek odkrycia nowych faktów. Mimo to badacz, pracujący na innych polach, nie miałby jeszcze powodu zazdrościć matematykowi, gdyby jego wywody nie odnosiły się do przedmiotów rzeczywistych, lecz tylko do tworów naszej wyobraźni. Nie można się przecież dziwić, że się dochodzi do zgodnych wniosków logicznych, jeżeli się zawarło umowę co do twierdzeń zasadniczych (pewników), jak też co do metod, którymi mamy posługiwać się, aby z owych twierdzeń zasadniczych wyprowadzać dalsze twierdzenia. Otóż tutaj zjawia się zagadka, która niepokoiła badaczy we wszystkich czasach. Jak to możliwe, że matematyka, która jest owocem ludzkiego myślenia niezawisłym od wszelkiego doświadczenia, tak doskonale stosuje się do przedmiotów rzeczywistych. Czyż rozum ludzki może badać własności przedmiotów rzeczywistych samym myśleniem, bez pomocy doświadczenia. Na to wedle mego zdania należy krótko odpowiedzieć: o ile twierdzenia matematyczne odnoszą się do rzeczywistości nie są one pewne, a o ile są pewne, to nie odnoszą się do rzeczywistości. Zdaje mi się, że ogół uzyskał w tej sprawie zupełną jasność dopiero dzięki owemu kierunkowi w matematyce, który nosi nazwę *aksjomatyzacji*. Postęp uzyskany przez aksjomatyzację polega na ścisłym oddzieleniu tego, co jest logiczne, formalne od tego, co jest rzeczowe i dostępne dla zmysłów: wedle zasad aksjomatyzacji tylko zagadnienia logiczno-formalne są przedmiotem matematyki, a nie związana z nimi treść zmysłowa lub jakakolwiek inna. Zastanówmy się z tego punktu widzenia nad jakimkolwiek pewnikiem geometrycznym, np. następującym: Przez dwa punkty w przestrzeni przechodzi jedna i tylko jedna prosta. Jak należy interpretować ten pewnik w myśl dawniejszych i w myśl nowoczesnych zasad.

Dawniejsza interpretacja. Każdy wie, co to jest prosta i co to jest punkt. Czy ta wiedza pochodzi z jakiejś własności ducha ludzkiego, czy też z doświadczenia, czy może z obu źródeł lub skądinąd, tego matematyk nie ma potrzeby roztrzygać, lecz pozostawia to filozofowi. Opierając się na tej wiedzy, danej przed wszelką matematyką, pewnik ten (jak zresztą wszystkie inne pewniki) jest oczywisty, to znaczy jest apriorycznym wyrazem części tej wiedzy.

Nowsza interpretacja. Geometria zajmuje się przedmiotami, które oznacza się wyrazami: prosta, punkt itd. Nie zakłada się, że istnieje uzmysłowienie tych przedmiotów lub wiedza o nich, przyjmuje się tylko prawdziwość pewników, jak wyżej przytoczonego, w sposób czysto formalny, to znaczy bez względu na jakąkolwiek treść poglądową lub doświadczalną. Te pewniki są wolnymi tworami ducha ludzkiego. Wszystkie inne twierdzenia geometryczne są logicznymi wnioskami, wyprowadzonymi z pewników (które należy pojmować czysto formalnie). Pewniki określają dopiero przedmioty, którymi zajmuje się geometria. Schlick dlatego bardzo trafnie w swej książce o teorii poznania nazwał je ,,definicjami uwikłanymi" (implizite Definitionen).

Takie pojmowanie pewników ze stanowiska aksjomatyki nowoczesnej uwalnia matematykę od składników obcych i usuwa mistyczną niejasność, która przedtem ciążyła na jej podstawach. Takie czyste przedstawienie przekonuje nas jednak w sposób oczywisty, że matematyka jako taka nie może niczego powiedzieć ani o przedmiotach poglądowego wyobrażenia, ani o przedmiotach rzeczywistych. W geometrii aksjomatycznej ,,punkt", ,,prosta" itd. są to tylko schematy beztreściowe. To, co im daje treść, nie należy już do matematyki.

Jednakowoż wiadomo, że matematyka w ogólności, a geometria w szczególności zawdzięczają swoje powstanie potrzebie dowiedzenia się czegoś o zachowaniu się przedmiotów rzeczywistych. Już samo słowo ,,geometria", które oznacza ,,mierzenie ziemi", świadczy o tym. Miernictwo zajmuje się bowiem możliwościami wzajemnego położenia pewnych ciał rzeczywistych, mianowicie części kuli ziemskiej, sznurów i płyt mierniczych. Oczywiście systemy pojęciowe aksjomatyki same przez się nie mogą niczego powiedzieć o zachowaniu się takich przedmiotów rzeczywistych, które będziemy nazywać ciałami praktycznie sztywnymi. Celem umożliwienia tego, należy geometrię ogołocić z jej szaty tylko logiczno-formalnej i pod beztreściowe układy pojęciowe geometrii aksjomatycznej podłożyć przedmioty rzeczywiste i dostępne dla zmysłów. Aby to uczynić, należy tylko dodać zdanie następujące: Co do swego wzajemnego położenia, ciała stałe zachowują się tak jak twory trójwymiarowe geometrii euklidesowej; wtedy twierdzenia geometrii euklidesowej zawierają już stwierdzenia o zachowaniu się ciał praktycznie sztywnych. Geometria tak uzupełniona jest oczywiście nauką przyrodniczą: możemy ją nawet uważać za najdawniejszą gałąź fizyki. Jej stwierdzenia polegają w istocie na indukcji z doświadczenia, a nie na wnioskach logicznych. Tak uzupełnioną geometrię będziemy nazywali ,,geometrią praktyczną" i będziemy ją odróżniali od geometrii czysto aksjomatycznej.

mutacja 11

mutacja 12

Równania współzmiennicze — równania, których obie strony zachowują się przy zmianach układu współrzędnych tak jak skalar lub wektor, albo ogólniej — tensor. (przyp. red.)

mutacja 13

mutacja 14

mutacja 15

mutacja 16

mutacja 17

mutacja 18

Przedział czasoprzestrzenny — odległość w czterowymiarowej przestrzeni (x, y, z, t). Dla dwóch zdarzeń przedział ten równa się pierwiastkowi z różnicy kwadratów zwykłej (zmierzonej linijką) odległości między miejscami zajścia tych zdarzeń oraz drogi, jaką przebyłoby światło w czasie równym odstępowi czasowemu między tymi zdarzeniami. (przyp. red.)

Pytanie, czy praktyczna geometria świata jest euklidesowa, czy nie, ma istotne znaczenie; tylko doświadczenie może na nie odpowiedzieć. Każde mierzenie długości w fizyce jest praktyczną geometrią w tym znaczeniu, podobnie jak pomiary geodetyczne i astronomiczne, jeżeli się weźmie do pomocy prawdę, opartą na doświadczeniu, że światło rozchodzi się po liniach prostych wedle określeń geometrii praktycznej. Do tak określonego pojmowania geometrii dlatego przywiązuję szczególną wagę, iż bez niego nie mógłbym stworzyć teorii względności. Bez niego mianowicie następujące rozumowanie byłoby niemożliwe: W układzie odniesienia, który znajduje się w ruchu obrotowym względem jakiegoś układu inercjalnego, prawa rozmieszczenia ciał sztywnych (z powodu skrócenia lorentzowskiego) nie odpowiadają regułom geometrii euklidesowej; jeżeli więc układom nieinercjalnym nadajemy równe prawa z układami inercjalnymi, należy opuścić geometrię euklidesową. Stanowcze posunięcie, jakim jest przejście do współzmienniczych równań ogólnej teorii względności, nie doszłoby do skutku, gdyby nie można było oprzeć się na powyższej interpretacji. Jeżeli odrzucimy związek między obiektami aksjomatycznej geometrii euklidesowej a ciałami praktycznie sztywnymi, które spotykamy w rzeczywistości, dochodzimy łatwo do następującego rozumienia rzeczy, któremu hołdował tak bystry i głęboki myśliciel, jak H. Poincaré: Spośród wszystkich możliwych geometrii aksjomatycznych euklidesowa odznacza się prostotą. Ponieważ geometria aksjomatyczna sama przez się nie zawiera żadnych stwierdzeń o rzeczywistości zmysłowej, lecz dopiero w połączeniu z prawami fizycznymi, to byłoby posunięciem możliwym i rozsądnym pozostanie przy geometrii euklidesowej bez względu na to, jaką jest w istocie rzeczywistość. Łatwiej bowiem będzie zdobyć się na zmianę praw fizycznych, niż na zmianę aksjomatycznej geometrii euklidesowej, gdyby wystąpiły sprzeczności między teorią a doświadczeniem. Jeżeli odrzucimy związek między ciałem praktycznie sztywnym a geometrią, to faktycznie niełatwo będziemy mogli oderwać się od umowy, że należy pozostać przy geometrii euklidesowej, jako najprostszej. Dlaczego Poincaré i inni badacze odrzucają nasuwającą się samą przez się równoważność ciał praktycznie sztywnych, znanych z doświadczenia, i brył geometrycznych? Po prostu dlatego, że praktycznie sztywne ciała przyrody przy bliższym badaniu okazują się nie sztywnymi; możliwość względnych położeń ich elementów zależy od temperatury, sił zewnętrznych itd. Przez to pierwotny, bezpośredni związek między geometrią a fizyczną rzeczywistością wydaje się zniszczony i nasuwa się nam następujący, ogólniejszy sposób pojmowania, który charakteryzuje stanowisko Poincarégo. Geometria G nie wypowiada niczego o zachowaniu się przedmiotów rzeczywistych, czyni to dopiero w połączeniu z ogółem F praw fizycznych. Symbolicznie możemy powiedzieć, że tylko suma G+F podlega kontroli doświadczenia. Można więc dowolnie wybrać G, podobnie — część F. W celu uniknięcia sprzeczności należy tylko resztę F tak wybrać, aby G i całkowite F razem wzięte odpowiadały doświadczeniu. Przy takim pojmowaniu geometria aksjomatyczna i konwencjonalna część praw przyrody są dla teorii poznania równowartościowe. *Sub specie aeternitatis* Poincaré pojmując rzecz w ten sposób, ma wedle mego zdania rację. Pojęcie ciała pomiarowego i odpowiadające mu w teorii względności pojęcie zegara pomiarowego nie znajdują w świecie rzeczywistym ściśle odpowiadających im przedmiotów. Jest zresztą jasne, że ciała stałe i zegar w układzie pojęć fizycznych nie zajmują stanowiska elementów redukowalnych, lecz są tworami złożonymi, które w gmachu fizyki teoretycznej nie mają roli samodzielnej. Jestem jednak przekonany, że przy dzisiejszym stanie fizyki teoretycznej należy uważać je za pojęcia samodzielne; jesteśmy bowiem jeszcze bardzo daleko od tak ścisłej znajomości podstaw teoretycznych, abyśmy mogli podać dokładną konstrukcję teoretyczną owych tworów.

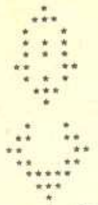
Co się tyczy zarzutu, iż w przyrodzie nie ma ciał faktycznie sztywnych, że więc własności, które im przypisujemy, nie odnoszą się do fizycznej rzeczywistości, to nie jest on tak głęboki, jak to się na pierwszy rzut oka wydaje. Nie jest bowiem trudno tak dokładnie oznaczać stan fizyczny ciała pomiarowego, żeby jego zachowanie ze względu na położenie wobec innych ciał pomiarowych było dostatecznie jednoznaczne; tak, żeby je można było zastąpić ciałem sztywnym. Do takich ciał będą odnosiły się nasze stwierdzenia o ciałach sztywnych.

Cała geometria praktyczna polega na pewnej zasadzie dostępnej dla doświadczenia, nad którą zatrzymamy się. Zróbmy dwa znaki na ciele praktycznie sztywnym i zaznaczmy między nimi odcinek. Dwa takie odcinki zwać się będą równe, jeśli znaki jednego z nich można sprowadzić do stałego pokrycia ze znakami drugiego. Otóż zakładamy:

Jeśli dwa odcinki kiedykolwiek i gdziekolwiek okazały się równymi, to są zawsze i wszędzie równe.

Nie tylko praktyczna geometria euklidesowa, lecz także najbliższe jej uogólnienie, praktyczna geometria Riemanna, a przez to także ogólna teoria względności, polegają na tych założeniach. Z dowodów doświadczalnych, które przemawiają za prawdziwością tego założenia, przytoczę tylko jeden. Zjawisko rozchodzenia się światła w próżni przyporządkowuje każdemu przedziałowi czasoprzestrzennemu pewien odcinek, mianowicie odpowiednią drogę światła, i nawzajem. Stąd wynika, że powyższe założenie o odcinkach w teorii względności odnosić się musi także do przedziałów czasoprzestrzennych.

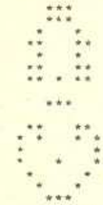
Można je wtedy tak sformułować: jeśli dwa idealne zegary kiedykolwiek i gdziekolwiek idą równie szybko (przy czym znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie), to idą zawsze i wszędzie jednakowo szybko, niezależnie od tego, gdzie i kiedy (chociaż stale będące w sąsiedztwie) je wzajemnie porównano.



mutacja 19

Jeśli to twierdzenie nie stosowałoby się do zegarów rzeczywistych, to częstości własne pojedynczych atomów tego samego pierwiastka chemicznego nie zgadzałyby się ze sobą tak dokładnie, jak uczy doświadczenie. Istnienie ostrych linii widmowych jest przekonywającym dowodem doświadczalnym na korzyść wymienionej zasady geometrii praktycznej. Stąd to właśnie wynika fakt, że możemy bardzo trafnie mówić o mierzeniu czterowymiarowego riemannowskiego kontinuum czasoprzestrzennego.

Pytanie, czy to kontinuum jest euklidesowe, czy ogólnie riemannowskie, czy też jeszcze inaczej zbudowane, jest wedle niniejszego rozumienia właściwie pytaniem fizycznym, na które doświadczenie musi dać odpowiedź, a nie kwestią samej konwencji, którą należy przyjąć ze stanowiska utylitarnego. Geometria riemannowska będzie ważna, jeśli prawa rozmieszczenia ciał praktycznie sztywnych tym dokładniej będą odpowiadały prawom geometrii euklidesowej, im mniejsze będą rozmiary upatrzonego obszaru czasoprzestrzennego.



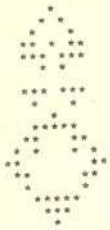
mutacja 20

Niniejsza interpretacja fizyczna geometrii jest niemożliwa, gdybyśmy próbowali zastosować ją do przestrzeni rzędu poddrobinowego. Część swego znaczenia zachowuje jednakowoż także wobec kwestii budowy cząstek elementarnych. Można bowiem próbować nadać znaczenie fizyczne owym pojęciom, które są zdefiniowane dla zachowania się ciał wielkich w porównaniu z drobinami także i wtedy, gdy chodzi o opis elementarnych cząstek elektrycznych, tworzących materię.

Problem ten do dzisiaj nie doczekał się zadowalającego rozwiązania. (przyp. red.)

Tylko doświadczenie roztrzygnąć może czy jesteśmy uprawnieni do takiej próby zakładającej ważność fizyczną geometrii riemannowskiej poza jej właściwym zakresem fizycznym. Mogłoby się okazać, że to uogólnienie jest równie niedopuszczalne, jak rozszerzenie pojęcia temperatury na części ciała wielkości rzędu drobinowego. Mniej problematyczne okazuje się rozszerzenie pojęć geometrii praktycznej na obszary wielkości kosmicznej. Wprawdzie można zarzucić, że konstrukcja utworzona ze sztywnych sztab tym bardziej oddala się od ideału sztywności, im większe są jej rozmiary, ale trudno przypisywać temu zarzutowi znaczenie zasadnicze. Dlatego pytanie czy Wszechświat jest w swych rozmiarach skończony, czy nie, wydaje mi się, w myśl geometrii praktycznej, bardzo uzasadnione. Nie wydaje mi się nawet wykluczone, że w niezbyt dalekiej przyszłości astronomia da na nie odpowiedź. Uprzytomnijmy sobie, czego uczy tu ogólna teoria względności. Wedle niej istnieją dwie możliwości:

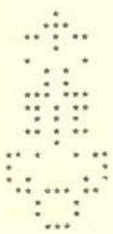
Ta sprawa również nie została do dzisiaj rozstrzygnięta. (przyp. red.)



mutacja 21

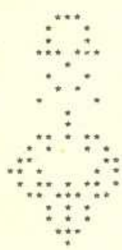
1. Wszechświat jest w swych rozmiarach nieskończony. To jest tylko możliwe, jeśli przeciętna gęstość przestrzenna materii skoncentrowanej w gwiazdach znika w całej przestrzeni, to znaczy, jeżeli stosunek całkowitej masy gwiazd do wielkości przestrzeni, w której są rozsiane, zbliża się nieograniczenie do zera, jeśli bierze się pod uwagę coraz większe przestrzenie.

2. Wszechświat jest skończony. To musi zachodzić, jeżeli we Wszechświecie istnieje gęstość średnia materii ważkiej, różna od zera. Objętość Wszechświata jest tym większa, im mniejsza jest owa gęstość średnia.
Muszę zauważyć, że istnieje powód teoretyczny, przemawiający za skończonością Wszechświata. Ogólna teoria względności uczy, że bezwładność danego ciała jest tym większa, im więcej mas ciężkich znajduje się w jego sąsiedztwie; nasuwa się zatem myśl przypisania całej bezwładności ciała wzajemnemu oddziaływaniu między nim a resztą ciał Wszechświata, gdyż ciężkość od czasów Newtona sprowadzono do wzajemnego oddziaływania między ciałami. Z równań ogólnej teorii względności można wyprowadzić, że takie zupełne sprowadzenie bezwładności do wzajemnego oddziaływania między masami — jak tego np. żądał E. Mach — tylko wtedy jest możliwe, jeśli Wszechświat jest skończony.



mutacja 22

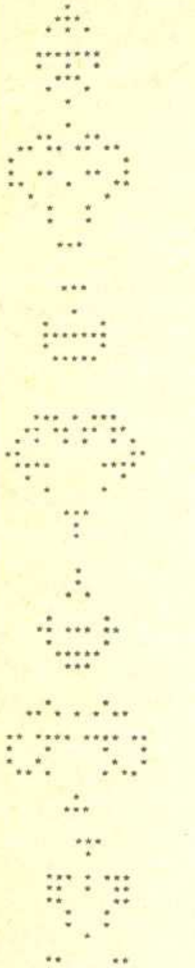
Na wielu fizyków i astronomów argument ten nie wywiera wrażenia. Ostatecznie tylko doświadczenie może roztrzygnąć, która z obu możliwości jest w Przyrodzie zrealizowana. Jak doświadczenie może na to odpowiedzieć? Najpierw można by sądzić, że gęstość średnią można oznaczyć przez obserwację części Wszechświata dostępnej naszym badaniom. Ta nadzieja jest zwodnicza. Rozmieszczenie gwiazd widzialnych jest ogromnie nieregularne, tak że nie mamy prawa przypuszczać, iż średnia gęstość materii gwiazdowej w przestrzeni równa się mniej więcej średniej gęstości Drogi Mlecznej. W ogóle można by zawsze — bez względu na wielkość zbadanej przestrzeni — podejrzewać, że poza tą przestrzenią nie ma gwiazd. Ocenienie średniej gęstości jest zatem wykluczone.



mutacja 23

Istnieje jednak druga droga, która wydaje mi się skuteczniejsza, chociaż i ta przedstawia wielkie trudności. Jeżeli bowiem pytamy się o odstępstwa, jakie przedstawiają wnioski wysnute z ogólnej teorii względności w porównaniu z wynikami teorii Newtona, to przede wszystkim spotykamy odstępstwa objawiające się w bliskości ciężkich mas, które można stwierdzić na przykładzie Merkurego. Jeśli Wszechświat jest w swych rozmiarach skończony, to istnieje jeszcze drugie odstępstwo od teorii Newtona, które w języku tej teorii tak można wyrazić: Pole grawitacyjne newtonowskie byłoby wtedy takie, jak gdyby było wywołane nie tylko przez klasyczne masy, lecz także przez masę ujemną, równomiernie rozmieszczoną w przestrzeni.
Ponieważ gęstość tej fikcyjnej masy musiałaby być ogromnie mała, to można by było spostrzec ją tylko w układach grawitacyjnych o bardzo wielkich rozmiarach.

Chodzi tu o tzw. ruch rozetkowy Merkurego. Orbita Merkurego (jak i innych planet) jest elipsą, która powoli obraca się. Szybkość tego obrotu (w dużym stopniu związanego z zaburzającym wpływem innych planet) może być całkowicie wyjaśniona dopiero po uwzględnieniu poprawek wynikających z ogólnej teorii względności. (przyp. red.)



mutacja 24

mutacja 25

mutacja 26

mutacja 27

mutacja 28

mutacja 29

Przypuśćmy, że znamy rozmieszczenie gwiazd w Drodze Mlecznej, jak też ich masy. Wtedy możemy na podstawie praw Newtona obliczyć pole grawitacyjne, jak też średnią prędkość, jaką gwiazdy muszą posiadać, aby Droga Mleczna wskutek wzajemnego oddziaływania gwiazd nie zapadła się w sobie, lecz zachowała swoją rozciągłość. Gdyby więc rzeczywiste prędkości gwiazd, które przecież można mierzyć, były mniejsze niż obliczone, to byłoby udowodnione, że rzeczywiste przyciąganie na wielkich odległościach jest mniejsze niż wedle prawa Newtona. Z takiego odstępstwa można by pośrednio dowieść skończoność Wszechświata, a nawet oszacować jego rozmiary.

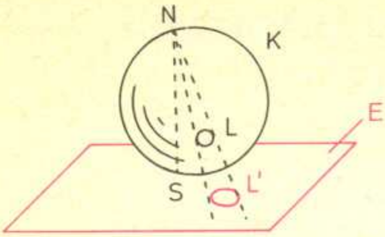
Czy możemy wyobrazić sobie Wszechświat trójwymiarowy, skończony, a przecież bez granic? Na to pytanie odpowiada się zwykle przecząco, ale niesłusznie. Następujące wywody będą miały za zadanie uzasadnić to. Okażę, że bez zbytecznego trudu możemy sobie utworzyć poglądowy obraz teorii skończoności Wszechświata, który po niejakiej wprawie wydaje się nam nawet swojski.

Najpierw uwaga z teorii poznania: Każda teoria geometryczno-fizyczna jest jako taka z natury niewyobrażalna; stanowi tylko system pojęć. Jednak te pojęcia służą do tego, aby w szereg doświadczeń czy to faktycznie przeżytych, czy tylko pomyślanych, wprowadzić związek logiczny. Teorię uczynić poglądową, znaczy więc wywołać wyobrażenie owych mnogich faktów, przeżytych przez nas, których uporządkowania schematycznego dokonuje dana teoria. W naszym przypadku musimy pytać się: Jak można sobie wyobrazić zachowanie się ciał sztywnych ze względu na ich wzajemne położenie, które odpowiada teorii skończoności Wszechświata? Wszystko, co mam tu do przytoczenia, jest pozbawione nowości; ale niezliczone, postawione mi pytania dowodzą, że pod tym względem nie zaspokojono jeszcze całkowicie potrzeb ludzi żądnych wiedzy. Znający rzecz zechce mi więc wybaczyć, że przypomnę rzeczy po części już dawno znane.

Co chcemy powiedzieć, gdy twierdzimy, że nasza przestrzeń jest nieskończona? Nic innego, jak to, iż moglibyśmy w niej pomieścić obok siebie dowolnie dużo ciał równej wielkości, a nigdy jej nie wypełnimy. Pomyślmy sobie mnogość skrzyń sześciennych równej wielkości, to wedle geometrii euklidesowej możemy je tak układać ponad sobą, obok siebie i za sobą, iż zapełnią dowolnie wielką część przestrzeni; ale ta budowa nie skończy się nigdy; zawsze będzie można przykładać nowe sześciany, a nigdy nie zabraknie miejsca. To jest treścią powiedzenia: przestrzeń jest nieskończona ze względu na ciała praktycznie sztywne, przy założeniu, że prawa wzajemnego położenia tych ostatnich dane są przez geometrię euklidesową.

Drugim przykładem nieskończonego kontinuum jest płaszczyzna. Na płaszczyźnie możemy kwadratowe płytki z kartonu tak umieszczać obok siebie, iż każdy kwadrat ma po każdej stronie inny, taki sam kwadrat. Budowa nie kończy się nigdy; coraz nowe kwadraty z kartonu można przykładać, jeśli prawa rządzące wzajemnym ich położeniem, dane są przez geometrię euklidesową. Płaszczyzna jest więc nieskończona ze względu na kwadraty z kartonu. Mówi się więc, że płaszczyzna jest kontinuum dwuwymiarowym, przestrzeń zaś jest kontinuum trójwymiarowym: co należy rozumieć przez liczbę wymiarów, uznaję za znane.

Otóż dajmy przykład kontinuum dwuwymiarowego, skończonego, ale bez granic. Pomyślmy sobie powierzchnię wielkiego globu i bardzo dużo okrągłych tarcz papierowych. Kładziemy takie kółko gdziekolwiek na powierzchnię globu. Gdy je przesuwamy dowolnie palcem po powierzchni globu, nigdzie na tej powierzchni nie spotykamy granicy. Powiadamy dlatego, że powierzchnia globu jest nieograniczonym kontinuum. Powierzchnia kuli jest przy tym kontinuum skończonym. Jeżeli bowiem nalepiamy takie kółeczka na globus, nie nalepiając nigdzie dwóch kółek na siebie, to powierzchnia globu staje się wreszcie tak pełna, że żadne nowe kółko nie znajdzie tam miejsca; oznacza to właśnie, że powierzchnia globu jest skończona ze względu na kółka papierowe. Powierzchnia kuli jest kontinuum dwuwymiarowym, nieeuklidesowym, to znaczy — prawa wzajemnego położenia ciał sztywnych w niej leżących nie zgadzają się z prawami płaszczyzny euklidesowej. Można to stwierdzić w sposób następujący: Połóżmy dokoła jednego takiego kółka sześć nowych kółeczek itd. Jeżeli wykonujemy tę konstrukcję na płaszczyźnie, to powstaje konglomerat bez luki, w którym każde kółko, nie leżące na granicy styka się z sześcioma innymi. Na powierzchni kuli z początku konstrukcja także się udaje, tym lepiej, im mniejszy jest promień takiego kółka w porównaniu z promieniem kuli. Im dalej konstrukcja postępuje, tym jawniej okazuje się, że ugrupowanie kółek w sposób wskazany i to bez luk nie jest możliwe, jakby to musiało być wedle zasad geometrii euklidesowej. W ten sposób nawet istoty nie mogące opuszczać powierzchni kulistej, ani spoglądać stamtąd w przestrzeń trójwymiarową, mogłyby przez samo eksperymentowanie owymi kółkami stwierdzić, że ich „przestrzeń" dwuwymiarowa nie jest euklidesowa, lecz sferyczna. Wedle najnowszych wyników teorii względności jest prawdopodobne, że nasza przestrzeń trójwymiarowa jest w przybliżeniu sferyczna, to znaczy, że prawa wzajemnego położenia leżących w niej ciał sztywnych dane są nie przez geometrię euklidesową, lecz w przybliżeniu sferyczną, jeżeli bierze się pod uwagę dostatecznie wielkie obszary. W tym to miejscu buntują się myśli Czytelnika. „Tego sobie żaden człowiek nie może wyobrazić" — mówi oburzony. „To można mówić, ale nie myśleć. Mogę sobie pomyśleć powierzchnię kulistą, ale nie jej analogon trójwymiarowy".



Tę przeszkodę należy pokonać, a cierpliwy Czytelnik zobaczy, że nie jest to rzecz zbyt trudna. W tym celu zajmijmy się znowu badaniem dwuwymiarowej powierzchni kulistej. Niech na rysunku $\mathcal{K}$ będzie powierzchnią kuli, $\mathcal{E}$ płaszczyzną styczną w punkcie S, którą na rysunku — dla łatwiejszego uzmysłowienia — przedstawiono ograniczoną. Niech L będzie kołową tarczą na powierzchni kuli. Pomyślmy sobie punkt świetlny, umieszczony w punkcie N, leżącym diametralnie naprzeciwko punktu S. Kółko L rzuca wtedy na płaszczyznę $\mathcal{E}$ cień kołowy L'. Każdemu punktowi na kuli odpowiada jego cień na płaszczyźnie. Gdy kółko L porusza się po kuli $\mathcal{K}$, to cień L' posuwa się po płaszczyźnie $\mathcal{E}$. Gdy tarcza L jest w S, to nakrywa się ze swoim cieniem. Gdy od S porusza się ku górze, to cień L' oddala się na płaszczyźnie $\mathcal{E}$ od S i rośnie coraz bardziej. Gdy kółko L zbliża się do punktu świetlnego N, to L' dąży ku nieskończoności i staje się nieskończenie wielkie.

Pytamy się, jakie są prawa, normujące położenie cieni L' na płaszczyźnie $\mathcal{E}$? Oczywiście takie same, jak dla kółek L na kuli $\mathcal{K}$, gdyż każdej figurze pierwotnej na $\mathcal{K}$ odpowiada cień jej na $\mathcal{E}$. Geometria cieni na płaszczyźnie zgadza się z geometrią kółek na kuli. Jeżeli owe cienie nazwiemy figurami sztywnymi, to rządzi nimi na płaszczyźnie $\mathcal{E}$ geometria sferyczna. W szczególności ze względu na te cienie płaszczyzna jest skończona, gdyż cienie te na niej zmieścić się mogą tylko w skończonej liczbie. Otóż powie się: „To nonsens; owe cienie nie są figurami sztywnymi; wystarczy posuwać podziałkę po płaszczyźnie, aby się przekonać, że cienie stają się coraz większe w miarę, jak wędrują od S do nieskończoności". Cóż jednak, jeśli na płaszczyźnie $\mathcal{E}$ podziałki tak się zachowują, jak cienie L'. Wtedy nie można by stwierdzić, że cienie rosną, oddalając się od S; wtedy to powiedzenie jest bezprzedmiotowe. W ogóle o cieniach na płaszczyźnie to jedynie można powiedzieć, iż geometrycznie zachowują się dokładnie tak, jak sztywne kółka na powierzchni kuli, w myśl geometrii euklidesowej.

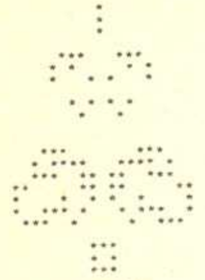
Należy dokładnie sobie zdać sprawę z faktu, iż nasze powiedzenie o rośnięciu cieni kółek w miarę oddalania się od S ku nieskończoności nie ma samo w sobie znaczenia obiektywnego, jak długo dla porównania nie możemy posługiwać się ciałami sztywnymi w znaczeniu euklidesowym, które można by było przesuwać po płaszczyźnie $\mathcal{E}$. Ze względu na prawa rządzące położeniem cieni L' punkt S jest na płaszczyźnie tak samo nieuprzywilejowany, jak na kuli. Podane powyżej uzmysłowienie geometrii sferycznej na płaszczyźnie jest dla nas dlatego ważne, że można wygodnie przenieść je na przestrzeń trójwymiarową.

Pomyślmy sobie punkt S w naszej przestrzeni i wielką ilość małych kul L', które wszystkie można sprowadzić do wzajemnego nakrycia. Niech te kule nie będą jednak sztywne w znaczeniu euklidesowym, lecz niech ich promień rośnie (widziany ze stanowiska geometrii euklidesowej) w miarę poruszania się od S ku nieskończoności i niech ów wzrost odbywa się wedle tego samego prawa, jak wzrost promieni cieni L' na płaszczyźnie.

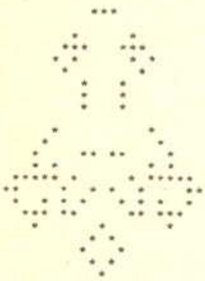
Po żywym uprzytomnieniu sobie geometrycznego zachowania się naszych kul przyjmiemy, że w naszej przestrzeni nie ma w ogóle ciał sztywnych w myśl geometrii euklidesowej, a są tylko ciała zachowujące się, jak nasze kule L'.

Wtedy posiadamy żywy obraz trójwymiarowej przestrzeni sferycznej czy też raczej trójwymiarowej geometrii sferycznej. Przy tym musimy nasze kule nazywać kulami „sztywnymi". Ich wzrastania w miarę oddalania się od S tak samo nie można zauważyć przy pomocy podziałek, jak tego nie można zauważyć na cieniach, na płaszczyźnie $\mathcal{E}$, gdyż podziałki zachowują się tak, jak kule. Przestrzeń jest jednorodna, to znaczy — w otoczeniu każdego punktu możliwe są te same konfiguracje kul. Bez rachunku można to zrozumieć tylko dla dwóch wymiarów, gdy znowu wracamy do kółek na powierzchni kulistej. Nasza przestrzeń jest skończona, gdyż z powodu „wzrastania" kul tylko skończona ich liczba może zmieścić się w przestrzeni.

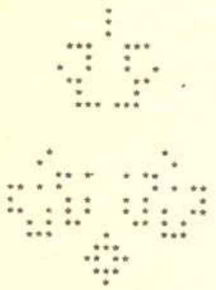
Tak uzyskaliśmy poglądowy obraz geometrii sferycznej, posługując się swą wprawą w myśleniu i wyobrażaniu jako narzędziem. Nietrudno pogłębić i ożywić tak uzyskane wyobrażenia przez wykonanie specjalnych konstrukcji. Nietrudno byłoby zresztą uzmysłowić sobie w sposób analogiczny tak zwaną geometrię eliptyczną. Tutaj chciałem tylko okazać, że ludzka zdolność wyobrażania wcale nie ma potrzeby kapitulować przed geometrią nieeuklidesową.



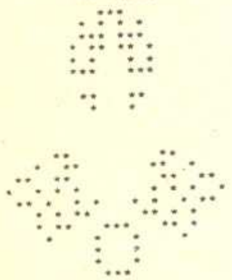
mutacja 30



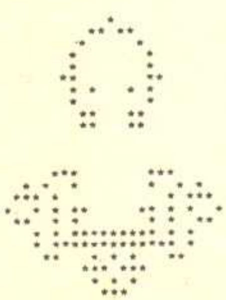
mutacja 31



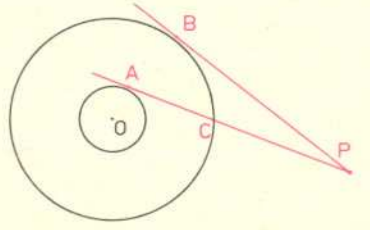
mutacja 32



mutacja 33



mutacja 34



Rozwiązanie zadania M 112

Niech O będzie środkiem danych okręgów. Ponieważ $OA \perp PA$ i $OB \perp PB$, więc

$$OA^2 + PA^2 = OP^2 = OB^2 + PB^2,$$

skąd

$$PA^2 - PB^2 = OB^2 - OA^2 = OC^2 - OA^2 = AC^2$$

Rozwiązanie zadania M 114

Nierówność tę można udowodnić przez indukcję. Jest jednak dowód bardziej elegancki:

$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{n} + \ldots + \binom{2n}{2n} > \binom{2n}{n}.$$