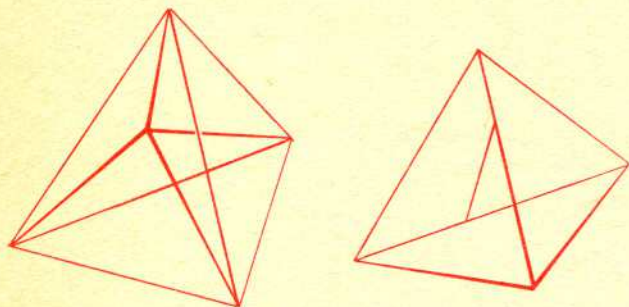


Mówimy, że figura daje się zanurzyć w n -wymiarową przestrzeń euklidesową E^n , gdy jest ona homeomorficzna z pewną figurą leżącą w E^n . Nie każda figura jednowymiarowa daje się zanurzyć w prostą E^1 (na przykład okrąg). Istnieją także figury jednowymiarowe, które nie dają się zanurzyć w płaszczyznę E^2 (rys. 3). Okazuje się jednak, że każdą figurę jednowymiarową można zanurzyć w trójwymiarową przestrzeń euklidesową E^3 . Wynika to z następującego ważnego i głębokiego twierdzenia.

Twierdzenie o zanurzeniu. Każda figura n -wymiarowa daje się zanurzyć w $(2n+1)$ -wymiarową przestrzeń euklidesową E^{2n+1} .

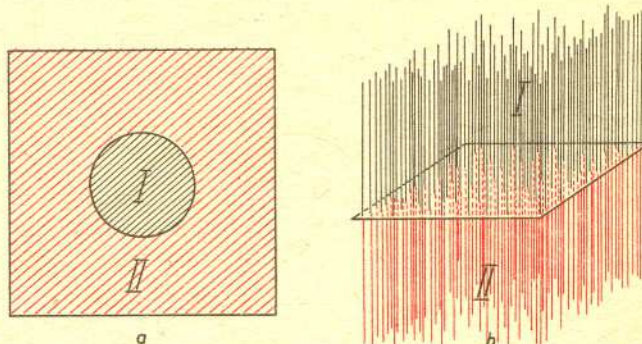


Rys. 3. Jednowymiarowe figury nie dające się zanurzyć w płaszczyźnie

Zauważmy, że zgodnie z definicją figura jest zerowymiarowa tylko wtedy, gdy ma ona pokrycie dowolnie małymi i rozłącznymi zbiorami domkniętymi. A zatem zerowymiarowa jest na przykład każda figura skończona, a także zbiór liczb wymiernych (lub niewymiernych) na prostej lub na płaszczyźnie. Powiemy, że domknięta figura leżąca w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n rozcina tę przestrzeń, gdy po jej

usunięciu z przestrzeni E^n pozostała część przestaje być spójna, tzn. rozpada się na kilka kawałków. Na przykład okrąg i prosta rozcinają płaszczyznę E^2 (rys. 4a). Zauważmy, że są to figury jednowymiarowe. Okazuje się, że żadna figura zerowymiarowa nie rozcina płaszczyzny. Podobnie, powierzchnia kuli, a także dowolna płaszczyzna rozcina trójwymiarową przestrzeń euklidesową E^3 (rys. 4b). Żadna jednak figura jednowymiarowa nie ma tej własności. Fakty te wynikają z następującego twierdzenia.

Twierdzenie o rozcinianiu. Żadna figura domknięta wymiaru mniejszego niż $n-1$ nie rozcina E^n .



Rys. 4. Rozcinanie przestrzeni E^2 i E^3

Wymieniliśmy zaledwie kilka twierdzeń składających się na piękną i bogatą teorię wymiaru. Wszystkich zainteresowanych tą teorią odsyłamy do interesującej i przystępnie napisanej książeczki R. Dudy pt. „O pojęciu wymiaru” (Biblioteczka Matematyczna 31, PZWS, Warszawa 1972).

Ruchy Browna (II)

Dr Bogdan CICHOCKI



W poprzednim numerze „Deltę” opisaliśmy zmagania fizyków XIX wieku z problemem tzw. ruchów Browna. Przypomnijmy podstawowe fakty. W roku 1827 Robert Brown odkrył zygzakowate ruchy wykonywane przez drobne ziarenka zawieszono w cieczy. Ruchy te obserwowano dla wszystkich substancji, o ile zostały one tak rozdrobnione, że ziarenka miały średnicę co najwyżej kilku mikronów. Próby wyjaśnienia przyczyn ruchów Browna napotkały poważne trudności. Wszystkie hipotezy sprowadzające owe przyczyny do działania czynników zewnętrznych po konfrontacji z doświadczeniem musiały zostać odrzucone. Wyjaśnienie zagadki na gruncie teorii kinetyczno-molekularnej również wydawało się niezadawalające. Jeżeli bowiem przyjmujemy, że ruchy Browna są wynikiem zderzeń molekuł cieczy z zawieszonymi w niej ziarenkami, to: po pierwsze, proste oszacowanie wykazuje, że prędkość, jaką uzyska ziarenko na skutek jednego zderzenia z molekułą cieczy, ma niezwykle małą wartość; po drugie, jak sugerowali przeciwnicy hipotezy atomowej, ziarenka są bombardowane równomiernie ze wszystkich stron i w rezultacie nie powinny w ogóle się poruszać. Co więcej, jeżeli wyliczymy średnią prędkość ziarenek na podstawie zasady ekwipartycji energii, to uzyskamy wartość ok. 10 tys. razy większą niż obserwowana w eksperymentach. Tak wyglądała sytuacja na przełomie XIX i XX wieku. Wiek XX przyniósł jednak rozwiązanie zagadki. A oto, jak do tego doszło.

Pierwszym ważnym momentem było skonstruowanie przez Siedentopfa i Zsigmondy'ego w roku 1903 tzw. ultramikroskopu. Zasada działania tego przyrządu była bardzo prosta. Od 1868 roku znano zjawisko Tyndalla polegające na rozpraszaniu światła przez ośrodki mętne — ośrodki, które są właśnie omawianymi przez nas zawiesinami drobnych cząsteczek w cieczach i gazach. Wiązka światła

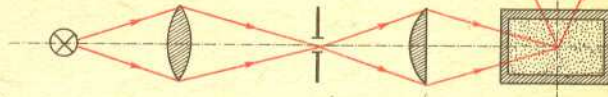


Przez dwa lata (1977/78 i 1978/79) Polskie Radio nadawało prowadzoną przez nas audycję Radiodelta. Dziś Radiodelty już nie ma.

Piszemy o tym dlatego, że niestety nie ma już też wśród nas Redaktora Jana Małkowskiego, który nauczył nas "jak to się robi", jak przygotować audycję, jak mówić, jak nagrywać.

I za tę troskliwą opiekę jesteśmy Mu wdzięczni. I zawsze będziemy.

Redakcja Delt



Schemat ultramikroskopu

padająca na taki ośrodek jest rozpraszana przez cząsteczki zawiesiny. Dla cząsteczek kulistych o rozmiarach dużo mniejszych od długości fali padającej λ natężenie światła rozproszonego jest, zgodnie z prawem Rayleigha, proporcjonalne do kwadratu objętości cząsteczki i odwrotnie proporcjonalne do czwartej potęgi λ . W ultramikroskopie naczynie z zawiesiną oświetlane jest z boku przez bardzo silną wiązkę światła, a obserwowane przez zwykły mikroskop w kierunku prostopadłym do wiązki. Do obserwatora dociera wtedy tylko światło rozproszone. Na ciemnym tle widoczne są jasne punkciki wszędzie tam, gdzie znajdują się ziarenka zawiesiny. W ten sposób można obserwować ziarenka o rozmiarach nawet rzędu kilku nanometrów ($1\text{nm} = 10^{-3}\mu\text{m}$). Niektórych Czytelników może ten fakt zaskoczyć. Przecież wiadomo, że zdolność rozdzielcza mikroskopu jest co do rzędu wielkości równa długości fali świetlnej, a ta zawiera się w granicach ok. $0,3\mu\text{m}$ do $0,7\mu\text{m}$. Nie ma w tym żadnej sprzeczności. Ultramikroskop nie pozwala bowiem dostrzec kształtów ziarenek, lecz jedynie stwierdzić ich obecność w danym punkcie przestrzeni. Jest to jednak całkowicie wystarczające, by śledzić ich ruchy. Przypomnijmy, że intensywność ruchów Browna wzrastała wraz ze zmniejszeniem się rozmiarów cząsteczek zawiesiny. Tymczasem ultramikroskop pozwolił na obserwację ziarenek o średnicy ok. 100 razy mniejszej od średnicy tych, które widziano przez zwykły mikroskop.



Eksperymentatorzy drugiej połowy XIX w. mieli poważne trudności z uzyskaniem ilościowych wyników dla ruchów Browna i posługiwali się w związku z tym głównie subiektywnym pojęciem ich intensywności. Teraz dysponowali przyrządem, który umożliwił im precyzyjne pomiary. Brakowało tylko teorii. Pełną teorię ruchów Browna sformułowano niebawem. W 1905 r. A. Einstein opublikował bowiem pracę, w której podał prawidłowy opis tych ruchów traktując je jako szczególny przypadek procesu dyfuzji i otrzymując w rezultacie wzór na przesunięcie cząsteczek zawiesiny. Einstein posługiwał się jednak abstrakcyjnym jak na owe czasy sformułowaniem fizyki statystycznej i nie wnikał w mechanizm zjawiska. Mechanizm ten pozostawał w związku z tym dalej niejasny. Ale w rok później pod wpływem pracy Einsteina wyniki swoich przemyśleń przedstawił M. Smoluchowski. Używając prostych argumentów ostatecznie rozwikłał zagadkę. Prześledźmy szczegóły jego rozumowania.

Swoje rozważania rozpoczął Smoluchowski od odparcia zarzutów Nagëliego. Stwierdził, że rzeczywiście przyrost prędkości ziarenka na skutek zderzenia z jedną molekułą cieczy jest bardzo mały, ale wyciąganie z tego wniosku, iż ziarenko będzie stało w miejscu to błąd. Jak sam pisze: „Jest to taki sam błąd rozumowania, jak gdyby człowiek uprawiający grę hazardową (np. rzucanie kostki) sądził, że nigdy większej straty ani też większego zysku mieć nie będzie, niż wynosi stawka na jeden rzut. Wiemy dobrze, że szczęście i nieszczęście zwykle niezupełnie się równoważą; że im dłużej gra trwa, tym większa jest przeciętna suma albo wygrana, albo stracona”. Aby uściślić ten argument, Smoluchowski przytoczył proste obliczenie. Niech prawdopodobieństwa rzutów korzystnego i niekorzystnego są równe $1/2$. Prawdopodobieństwo P_m otrzymania w n próbach m wyników korzystnych i $n - m$ niekorzystnych, a zatem nadwyżki $2m - n$ jednych nad drugimi, dane jest przez rozkład Bernoulli'ego

$$P_m = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{m}.$$

Dokładne omówienie tego przykładu znajdzie Czytelnik w artykule „Rzuc monetę, rzuc monetę...” w *Delcie* 1/1983.

Dla dużych n : $n! \approx (2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n}$

Stąd znajdujemy, że średnia $\nu = \langle |2m - n| \rangle$ wartości bezwzględnej tej nadwyżki wynosi

$$\nu = 2 \sum_{m=n/2}^n \frac{(2m-n)}{2^n} \binom{n}{m} = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2}, \quad \text{gdzie } n \text{ jest parzyste.}$$

Dla bardzo dużych n stosując wzór Stirlinga można sprowadzić powyższą średnią do

$$\nu = \sqrt{\frac{2n}{\pi}},$$

czyli ν jest proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z liczby prób. Ziarenko zawieszony uderzane jest przez molekuły cieczy średnio 10^{20} razy w ciągu sekundy. Zatem przeciętna nadwyżka uderzeń z jednej strony nad uderzeniami z drugiej strony będzie w tym czasie 10^{10} . Jeśli nawet wynik pojedynczego zderzenia jest bardzo mały, to sumaryczny efekt może być znaczny. Ziarenko będzie się poruszać!



Pozostała do wyjaśnienia sprawa średniej prędkości. Aby rozwikłać ten problem, Smoluchowski postawił na początek pytanie: jaki jest tor ruchu cząsteczki Browna? Zauważył, stwierdził, że cząsteczka ta ma ogromną masę w porównaniu z masą pojedynczej molekuły cieczy. Również średnia wartość jej prędkości jest zgodnie z zasadą ekwipartycji energii bardzo duża. W związku z tym jedno czy kilka uderzeń ze strony molekuł cieczy nie jest w stanie zmienić kierunku ruchu rozpędzonej cząsteczki Browna. Będzie się ona poruszać po linii prostej przez bardzo długi okres czasu w porównaniu ze średnim czasem między kolejnymi zderzeniami, który jest rzędu 10^{-20} s. Będzie się tak poruszać praktycznie aż do momentu zatrzymania. Po czym, na skutek fluktuacji liczby zderzeń z różnych stron zostanie rozpędzona w innym kierunku itd. Zatem tor jej ruchu będzie się składał z prostych odcinków ukierunkowanych w sposób chaotyczny. Jeżeli chcielibyśmy zmierzyć prędkość ziarenka i porównać ją z wartością wynikającą z zasady ekwipartycji energii, to musielibyśmy zrobić to na jednym z tych odcinków. Tymczasem, jak oszacował Smoluchowski, średni czas ruchu cząsteczki Browna po prostej jest rzędu 10^{-8} s. Ruchu o tak krótkim czasie trwania nie jesteśmy w stanie obserwować nawet pod ultramikroskopem. Stąd Smoluchowski wyciągnął natychmiast wniosek, że nie pomiar średniej prędkości, ale pomiar średniego oddalenia się ziarenka od położenia początkowego może być ilościowym testem przewidywań teorii kinetyczno-molekularnej. W celu wyznaczenia tego oddalenia Smoluchowski przyrównał ruch cząsteczki Browna do procesu, który dziś zwiemy błędzeniem przypadkowym. W rezultacie otrzymał następujący wzór, poprzednio wprowadzony przez Einsteina,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} t,$$

gdzie $\langle r^2 \rangle$ — średni kwadrat przesunięcia ziarenka w płaszczyźnie obserwacji w czasie t , a — promień ziarenka, η — współczynnik lepkości cieczy, T — temperatura, k_B — stała Boltzmanna równa R/N_A (R — stała gazowa, N_A — liczba Avogadro).

Już wstępna analiza tego wzoru przekonuje nas, że Einstein i Smoluchowski znaleźli właściwe rozwiązanie. Przeciętne przesunięcie cząsteczki Browna, które można utożsamiać z intensywnością jej ruchów, jest bowiem proporcjonalne do temperatury, odwrotnie proporcjonalne do lepkości cieczy i rozmiarów cząsteczki oraz nie zależy od substancji, z której cząsteczka jest zbudowana. Dokładnie tak, jak wynikało to z ówczesnie dostępnych jakościowych wyników obserwacji. Nie musiano ograniczać się jednak tylko do stwierdzenia tego rodzaju zgodności. Dysponując ultramikroskopem eksperymetatorzy mogli natychmiast przystąpić do precyzyjnych pomiarów.

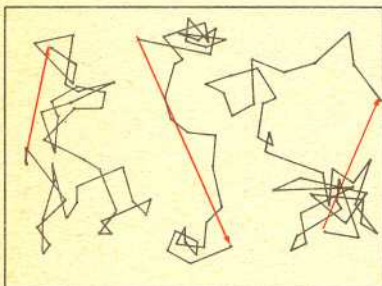
Pierwsze rezultaty ilościowe, jakie otrzymał Swedberg w 1907 roku, potwierdzały przewidywaną przez wzór Einsteina — Smoluchowskiego zależność od lepkości ośrodka i promienia cząsteczek. Decydujące znaczenie miały jednak wyniki prac Perrina z roku 1908. Perrin udoskonalił znacznie metody pomiarów opracowując m.in. metodę sporządzania zawiesin składających się z ziarenek o jednakowych rozmiarach. Przyjmując, że wzór na średni kwadrat

W rzeczywistości, na skutek zastosowania szeregu przybliżeń końcowa wartość średniego kwadratu przesunięcia, którą otrzymał Smoluchowski w pracy z 1906 r., różniła się od wyniku Einsteina o czynnik

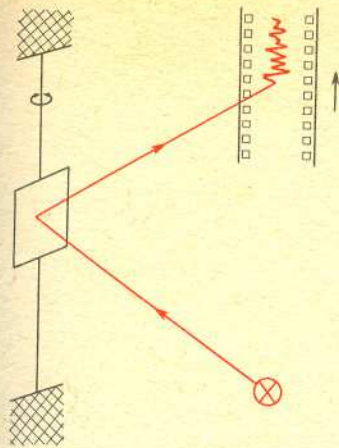
$$\sqrt{\frac{27}{64}}.$$

W późniejszych pracach

Smoluchowskiego rozbieżność ta już nie występowała.



Położenia cząsteczek Browna o średnicy ok. $1 \mu\text{m}$ rejestrowane co 30 sekund. Kolejność zaznaczono łącząc punkty odcinkami. Odcinek czerwony to całkowite przesunięcie cząsteczki Browna.

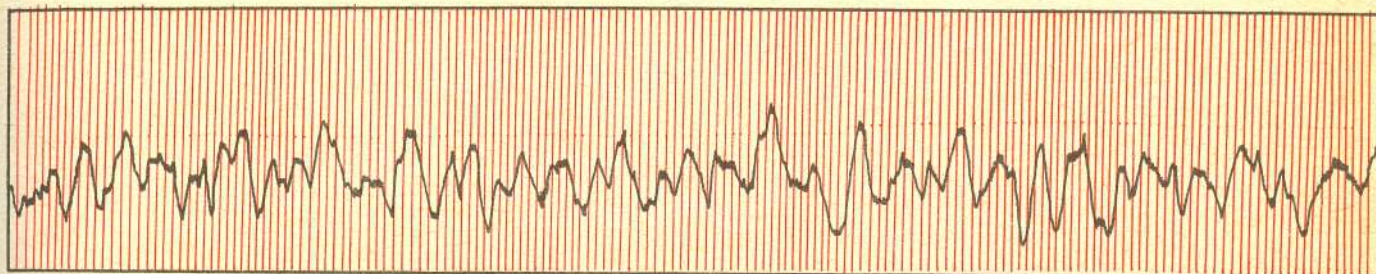


Schemat eksperymentu Kapplera ze zwierciadłem Smoluchowskiego

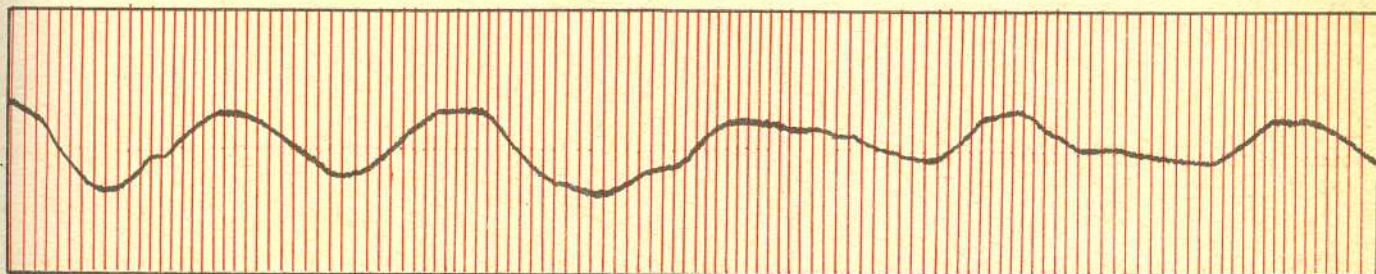
przesunięcia cząsteczki Browna jest prawidłowy, wyznaczył za jego pomocą na podstawie danych eksperymentalnych liczbę Avogadro. Uzyskany przez niego wynik: $N_A = 6,85 \cdot 10^{23}$. Znane ówczynie wartości liczby Avogadro otrzymywane na zupełnie innej drodze, m.in. przez samego Perrina, wahały się w granicach od $6 \cdot 10^{23}$ do $7 \cdot 10^{23}$ (obecnie znamy tę liczbę z dużą dokładnością, jest ona równa $6,023 \cdot 10^{23}$). Taka zgodność rezultatów musiała przekonać najzagorzalszych przeciwników hipotezy atomowej. Tak też się stało. Jeden z głównych oponentów W. Ostwald napisał w 1909 r.: „Doszedłem do przekonania, że od niedawna posiadamy doświadczalny dowód dyskretnej czy ziarnistej natury materii, którego od setek, a nawet tysięcy lat daremnie szukała hipoteza atomistyczna”.

Rozważania Smoluchowskiego znalazły jeszcze jedno potwierdzenie w pięknych doświadczeniach wykonanych w latach trzydziestych XX w. przez E. Kapplera. Otóż Kappler przeprowadził szereg eksperymentów ze zwierciadłem zawieszonym na sprężystej nici. Zwierciadło takie bombardowane przez cząsteczki powietrza wykonuje niewielkie, chaotyczne drgania, które są niczym innym jak odpowiednikiem ruchów Browna. Możemy je obserwować w prosty sposób kierując na zwierciadło promień świetlny i rejestrując na ekranie ślad promienia odbitego. Teorię tego zjawiska opracował już wcześniej Smoluchowski. W porównaniu z teorią „klasycznych” ruchów Browna wymagała ona uwzględnienia siły sprężystości nici. W oparciu o rezultaty Smoluchowskiego i wyniki pomiarów Kappler wyznaczył liczbę Avogadro z dokładnością do 1%. Ale nie tylko. W miejsce ekranu wstawił bowiem kliszę fotograficzną.

a



b



Typowe wyniki eksperymentu Kapplera.

Prędkość przesuwania kliszy:

- a) 0,046 cm/s, b) 0,416 cm/s. Odstęp między sąsiednimi liniami poziomymi: a) $\Delta t = 3,5$ s, b) $\Delta t = 0,553$ s.



Przesuwając kliszę uzyskiwał na niej obraz drgań zwierciadła w postaci zygzakowatej krzywej. Im większa była szybkość przesuwania kliszy, tym więcej szczegółów w postaci coraz mniejszych zygzaków było rejestrowanych. Ale po osiągnięciu pewnej szybkości dalsze jej zwiększanie nie powodowało już wykrywania nowych zwrotów zwierciadła. To, co Smoluchowskiemu wydawało się niemożliwe, stało się faktem. Kappler rejestrował elementarne ruchy zwierciadła — odpowiadające prostoliniowym ruchom cząsteczki Browna! Mógł zatem wyznaczyć ich średnią prędkość. Wynik zgadzał się doskonale z zasadą ekwipartycji energii.

Warto wskazać czynniki, które umożliwiły ten pomiar. Po pierwsze, ośrodkiem był bardzo rozrzedzony gaz (ciśnienie $p = 0,01$ mmHg), co spowodowało w stosunku do cieczy drastyczne zmniejszenie częstości zderzeń molekuł ośrodka z jednostką powierzchni umieszczonego w nim ciała. Poza tym intensywność ruchów Browna zwierciadła zależała jedynie od momentu skręcającego nici. Zwierciadło mogło być zatem bardzo duże (jedyne ograniczenie to wytrzymałość nici) i w konsekwencji mogło mieć duży moment bezwładności. W przypadku ziarenka zawieszzonego w cieczy tor zakreślany w ciągu 1 sekundy składał się z około 10^8 prostych odcinków. W doświadczeniu Kapplera opisane czynniki spowodowały, że tych odcinków było bardzo mało, średnio jeden na kilka sekund. Można je było zatem obserwować.



Model Friedmana opisał w *Delcie* 5/1982.



Parametr Ω określa stosunek efektywnej energii potencjalnej ϵ_p do energii kinetycznej ekspansji ϵ_k : $\Omega = |\epsilon_p|/\epsilon_k$.
 Przy $\Omega > 1$ W. jest grawitacyjnie związany; ekspansja po pewnym czasie zostaje wyhamowana i rozpoczyna się etap kurczenia. Przy $\Omega \leq 1$ W. posiada nieujemną energię całkowitą i ekspansja trwa wiecznie. Model $\Omega = 1$ nosi nazwę „płaskiego”, ponieważ geometria powierzchni stałego czasu w takim modelu jest płaska (euklidesowa). Fakt, że przedział, w którym zawarta jest wartość Ω , „zacieśnia” się wokół jedności przy $t \rightarrow 0$ jest zrozumiały, bowiem z definicji $|\Omega - 1| = |\epsilon_k + \epsilon_p|/\epsilon_k = \text{const}/\epsilon_k$. Ekspansja jest hamowana przez grawitację, a zatem przy $t \rightarrow 0$, $\epsilon_k \rightarrow \infty$ i wobec tego $\Omega \rightarrow 1$.

Pierwsze dojrzałe teorie kosmologiczne (mówiące o powstaniu i rozwoju Wszechświata) pojawiły się w latach dwudziestych naszego stulecia. Za swą podstawę miały ogólną teorię względności, a dokładniej modele Friedmana z teorii wyprowadzone. Ogromna popularność tematu i wielka ilość odkryć astronomicznych sprawiły, że podstawa taka przestała wystarczać. Zaczęto coraz jawniej postulować, aby kosmologię oprzeć na *całej* fizyce i by za stan, od którego odtwarzamy wstecz minione dzieje Wszechświata aż do jego początku, uznać *całość* naszej wiedzy o Wszechświecie, a więc nie tylko istnienie galaktyk czy gwiazd, lecz także by nie zapominać o tym, że na Ziemi pojawiło się życie. Słowem, zażądano od kosmologii, aby jej modele były na tyle precyzyjne, by przewidywały również zaistnienie kosmologów. Niżej przedstawiamy artykuł o tym, jak ten postulat jest omawiany wśród astronomów.

Zasada Antropiczna,

lub o tym, co zdaniem niektórych wynika z faktu istnienia życia na Ziemi oraz o braku dowodów na istnienie życia na Marsie i innych ciekawostkach przyrodniczych

Dr Roman JUSZKIEWICZ

Problem warunków początkowych

Z obserwacji astronomicznych wnioskujemy, że Wszechświat rozszerza się, tj. że gromady galaktyk oddalają się od siebie z prędkością $H_0 r$, gdzie r oznacza odległość między daną parą gromad, a H_0 — tzw. parametr Hubble'a (H jest funkcją czasu kosmologicznego t , a wskaźnik „0” oznacza obecną wartość tego parametru). Wiemy również, że ze wszystkich kierunków na niebie dociera do nas promieniowanie elektromagnetyczne ciała doskonale czarnego o temperaturze 3 K, oraz że Wszechświat składa się w 25% z helu i w 75% z wodoru (pomijając śladowe ilości pierwiastków ciężkich).

Jedynym modelem kosmologicznym, który pozwolił wytłumaczyć (i przewidzieć!) te obserwacje, jest model Friedmana, oparty na założeniu, że cała przestrzeń wypełniona jest materią w sposób jednorodny i izotropowy. Zgodność tych przewidywań z obserwacjami przemawia za tym, że nasz Wszechświat rozpoczął swoje istnienie od wielkiego wybuchu $1/H_0 \approx 20$ miliardów lat temu, oraz że materia rozmieszczona jest w przestrzeni niezwykle równomiernie — o tym, że wielkoskalowy rozkład materii jest rzeczywiście jednorodny świadczą również bezpośrednie obserwacje. Największe zagęszczenia i „dziury” w rozmieszczeniu galaktyk w obszarze o promieniu 10 miliardów lat świetlnych, które udało nam się wykryć, nie przekraczały swymi rozmiarami 200—300 milionów lat świetlnych. Wielkoskalowej symetrii towarzyszą odstępstwa od izotropii i jednorodności w „małej” skali (< 300 mln lat świetlnych) w postaci gromad galaktyk, galaktyk i gwiazd.

Model Friedmana wyjaśnia, skąd wziął się hel, skąd promieniowanie tła oraz dlaczego ekspansja odbywa się zgodnie z prawem Hubble'a, nie tłumaczy jednak *dlaczego* Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Symetria jest jednym z warunków początkowych modelu. Poza tym, w ramach określenia warunków początkowych należy zadać wartości H oraz tzw. parametru Ω w jakiejś ustalonej chwili czasu.

Problem horyzontu spowodowany jest tym, że w modelu Friedmana odległość r pomiędzy dwiema cząstkami rośnie w miarę ekspansji jak \sqrt{t} , podczas gdy „odległość do horyzontu” r_H , określająca drogę przebytą przez światło od chwili $t = 0$ rośnie jak t . W szczególności, w chwili wybuchu

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = \infty, \quad \left. \frac{dr_H}{dt} \right|_{t=0} = \text{const.}$$