Fizyka a piękno

Doc. dr hab. Tomasz HOFMOKL

Szkic obok przedstawia dziewczynę z wachlarzem. Jest piękna. Jesteście zdziwieni, nie widać tego — no trudno, to jest tylko uproszczony rysunek. Widać elementy jej postaci: tułów, ręce, nie jest ani łysa, ani ślepa. Macie jednak rację, w tak dużym uproszczeniu tracimy wiele informacji, które mogłyby pozwolić ocenić jej piękno.

Twierdzę, że badanie własności pól magnetycznego i elektrycznego jest piękną i pasjonującą dziedziną fizyki. Macie wątpliwości? A może to brak informacji nie pozwala na pełny zachwyt? Program szkolny dostarcza ogromnej ilości wiedzy o poszczególnych zjawiskach. Uczymy się elektrostatyki, magnetostatyki, o zjawiskach związanych z przepływem prądu elektrycznego, ale są to oddzielne, słabo powiązane ze sobą rozdziały fizyki. W szkole brak czasu na szersze spojrzenie — gdzieś trzeba się zatrzymać. Nas ograniczenia te nie dotyczą. Możemy swobodnie gawędzić, opuszczając co żmudniejsze wyprowadzanie wzorów. A może dzięki temu dostrzeżecie prawdziwie piękno ukryte za długimi przekształceniami formalnymi. Spróbujmy.
Przedstawiam nowe twierdzenie pachnące herezją: Pojęcie pola magnetycznego jest niepotrzebne. Na pewno jest wygodne w użyciu, jesteśmy doń przyzwyczajeni, ale twierdzę, że możemy się bezeń obyć. Nie wierzycie? Spróbuję ująć to bardziej precyzyjnie.

Wystarczy:

1. umieć obliczyć wyniki obserwacji zjawiska fizycznego w jednym inercjalnym układzie odniesienia na podstawie obserwacji tego samego zjawiska i w innym układzie inercjalnym,

2. znać prawo Coulomba, zasadę zachowania ładunku i, co wcale na jedno nie wychodzi, zasadę niezmienniczości ładunku,

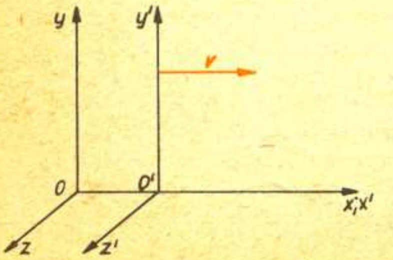
aby:

wnioskować, że przewodnik z prądem elektrycznym odpycha lub przyciąga ładunek elektryczny poruszający się równolegle do przewodnika.
Stąd już krok do opisania tych wszystkich zjawisk towarzyszących przepływowi prądu elektrycznego, które zwykle określamy mianem magnetycznych.

Hasło **wystarczy** tylko pozornie wygląda tak skromnie. Punkt pierwszy to w praktyce cała szczególna teoria względności Einsteina. Nie przejmujcie się, jeżeli jej nie znacie. To co jest nam potrzebne do rozważań, zrozumiecie bez trudu. Punktem wyjścia każdej teorii są założenia będące uogólnieniem pewnych faktów doświadczalnych. Jednym z takich podstawowych założeń szczególnej teorii względności jest stałość prędkości światła, niezależnie od tego, czy obserwator i źródło są nieruchome, czy któreś z nich porusza się. Kierowca samochodu zbliżając się do świateł na skrzyżowaniu zarejestruje tę samą prędkość docierającego doń promienia świetlnego, co pieszy stojący na chodniku. Ten zaskakujący wniosek wypływa z negatywnych wyników doświadczeń przeprowadzonych w II połowie XIX i na początku XX wieku; w doświadczeniach tych usiłowano wyznaczyć prędkość hipotetycznego wiatru eterowego. Stałość prędkości światła wydaje się przeczyć zdrowemu rozsądkowi, jest to jednak fakt dobrze ustalony — i trzeba go włączyć do naszej wiedzy o otaczającym świecie. Konsekwentne uznanie stałości prędkości światła niezależnie od ruchu źródła i obserwatora wymaga daleko idących modyfikacji w dotychczasowych teoriach fizycznych. Musimy przede wszystkim znaleźć taki sposób przeliczania (transformowania) wyników obserwacji z jednego układu inercjalnego do drugiego układu inercjalnego, aby prędkość światła była w obu układach jednakowa. Skorzystajmy z tego, czego inni dokonali, i popatrzmy, jak to można zrobić i jakie są konsekwencje wynikające z takiego postępowania.

Przyjmując oznaczenia z rysunku, reguły przeliczania współrzędnych w układzie x,y,z na współrzędne układu x',y',z', poruszającego się względem pierwszego wzdłuż osi x z prędkością V, można ująć wzorami:

(1)
$$x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \; z' = z; \; t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$



gdzie $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s — prędkość światła w próżni.

2) Długość odcinka transformuje się następująco:

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Sztaba w ruchu jest krótsza od takiej samej sztaby spoczywającej.

(3) Transformacja prędkości ciała poruszającego się wzdłuż osi x wyraża się wzorem:

$$v' = \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}},$$

gdzie v — prędkość ciała względem układu x,y,z; v' — prędkość tego samego ciała względem układu x',y',z'. Jeżeli obiektem jest foton poruszający się z prędkością światła c względem układu x,y,z, to jego prędkość względem układu x',y',z' wyniesie:

$$v' = \frac{c-V}{1-\frac{cV}{c^2}} = c\frac{c-V}{c-V} = c,$$

a więc w obu układach prędkość jest taka sama.

Transformacja (1) nosi nazwę transformacji Lorentza. Możemy ją stosować również w warunkach życia codziennego, czyli dla małych prędkości V i v. Jeżeli $v \ll c$ oraz $V \ll c$, to $v' = v-V$. Do tej zależności jesteśmy od dawna przyzwyczajeni.

Wiemy już, jak postąpić przy przeliczaniu wyników pomiarów wielkości fizycznych mierzonych względem różnych układów inercjalnych. Czy to jest jednak takie ważne? W tym właśnie miejscu należy przypomnieć sobie starą hipotezę niezmienniczości:

Podstawowe prawa fizyki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Hipotezę tę sformułował w odniesieniu do praw mechaniki Galileusz. Einstein rozciągnął ją na wszystkie dziedziny fizyki. Jest ona na tyle dobrze sprawdzona doświadczalnie, że mamy wszelkie podstawy, aby nazwać ją zasadą niezmienniczości i uważać ją za ustalone prawo naukowe.

Jeżeli zgodzimy się z takim jej potraktowaniem, otrzymamy potężne narzędzie badawcze: z jednej strony receptę na przeliczanie wartości wszystkich wielkości fizycznych mierzonych względem różnych układów inercjalnych, z drugiej strony zasadę, która mówi, że po przeliczeniu prawa fizyczne nie mogą ulec zmianie. Możemy sprawdzać i poprawiać każdą nową teorię fizyczną modyfikując ją dopóty, dopóki, jak to się mówi, nie będzie ona relatywistycznie niezmiennicza. Nie zawsze jest to łatwe i nie zawsze umiemy przeprowadzać niezbędne poprawki. W mechanice klasycznej i w jej dziale zwanym dynamiką trudności te pokonano, a wyniki są zaskakujące. Okazało się na przykład, że masa ciała poruszającego się rośnie wraz z prędkością ruchu zgodnie z zależnością $m' = \frac{m}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. Wynik ten potwierdzono doświadczalnie.

Konsekwencją zasady niezmienniczości i transformacji Lorentza jest prawo transformacji siły działającej na ciało, czyli — związki między wartościami siły mierzonej raz w jednym układzie inercjalnym, raz w drugim. Podamy je w szczególnym przypadku. Jeżeli cząstka spoczywa w układzie u', a układ u jest innym układem inercjalnym, który porusza się względem u' z dowolną prędkością V — to transformacja składowych (prostopadłej i równoległej do kierunku ruchu) siły działającej w układzie u' na cząstkę ma postać:

(4)
$$F_{\parallel} = F'_{\parallel},$$
$$F_{\perp} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,F'_{\perp}.$$

Można wykazać, że zjawiska zwane magnetycznymi są prostą konsekwencją zastosowania transformacji Lorentza do zjawisk związanych z ruchem ładunku elektrycznego oraz relatywi relatywistycznej niezmienniczości ładunku.

(5) Co wiemy o ładunkach elektrycznych? Zwykle to, co pamiętamy z elektrostatyki. Wiemy jeszcze nieco więcej, ale jest to wiedza niemal podświadoma — z jej posiadania nie zdajemy sobie sprawy albo nie doceniamy jej znaczenia. Czy prawdziwe jest zdanie: całkowity ładunek układu nie zmienia się na skutek ruchu nośników ładunku? Prawie każdy odpowie twierdząco; trudniej będzie uzasadnić to stanowisko. Zatrzymajmy się na chwilę przy tym twierdzeniu, warto je poprzeć danymi doświadczalnymi — przekonaliśmy się bowiem, że rzeczy oczywiste nie muszą być prawdziwe. Danych doświadczalnych na poparcie głoszonej tezy mamy bardzo wiele, i to dosłownie pod ręką. Należy tylko dokładnie sprawdzić, że atomy i cząsteczki różnych substancji są neutralne elektrycznie. Widzicie już związek? To bardzo proste. Atomy różnych substancji są zbudowane w różny sposób nie tylko pod względem liczby protonów i elektronów jako nośników ładunku; cząstki te poruszają się przecież w różnych substancjach w różny sposób. Elektrony krążą po różnych orbitach, protony związane są w jądrze słabiej lub silniej. Jeżeli atom wodoru jest elektrycznie neutralny, to fakt, że atom helu jest również neutralny, świadczy na korzyść relatywistycznej niezmienniczości ładunku. Pomiary neutralności ładunkowej atomów wykonano stosunkowo niedawno. J. G. King wykazał («Physical Rewiew Letters», 5 (1960), s. 562), że atom wodoru jest elektrycznie neutralny z dokładnością $1:10^{20}$. Podobny wynik otrzymano dla atomów helu.

Rozwiązanie zadania M27

Przypuśćmy, że wielomian $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ o współczynnikach całkowitych spełnia podane warunki.

Mamy wówczas

$$a_0 + 29a_1 + 29^2a_2 + \ldots + 29^na_n = 15,$$
$$a_0 + 26a_1 + 26^2a_2 + \ldots + 26^na_n = 8,$$

skąd, odejmując stronami, otrzymujemy:

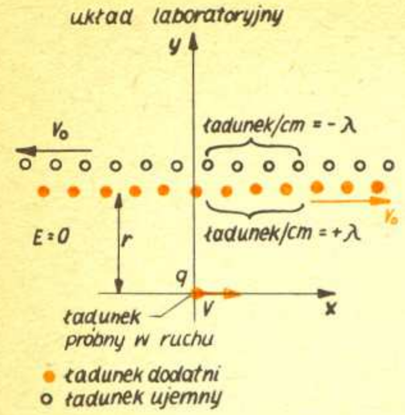
$$(*)\ (29-26)a_1 + (29^2-26^2)a_2 + \ldots + (29^n - 26^n)a_n = 7.$$

Zauważmy, że

$$29^k - 26^k = (29-26)(29^{k-1} + 29^{k-2}\cdot 26 + \ldots + 29\cdot 26^{k-2} + 26^{k-1}).$$

Lewa strona równości (*) jest więc podzielna przez 3, a prawa nie. Przypuszczenie nasze było więc fałszywe, a więc wielomian spełniający warunki podane w zadaniu, jeżeli istnieje, to ma któryś współczynnik niecałkowity. Łatwo sprawdzić, że wielomianem takim jest na przykład

$$f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{158}{3}.$$



(6) Pozwoliwszy ładunkowi na ruch, sprawiamy sobie wiele kłopotów. Pojawiają się nowe problemy, które trzeba rozstrzygać. Pamiętamy z elektrostatyki, że siła działająca na nieruchomy ładunek q umieszczony w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ wynosi $\vec{F} = q\vec{E}$. Czy związek pozostaje słuszny, gdy ładunek q porusza się? Nie można dać odpowiedzi jednym słowem. Musimy zrobić zastrzeżenie co do źródła pola. Aby można było zastosować wzór $\vec{F} = q\vec{E}$, pole musi pochodzić od układu ładunków, które w jakimś układzie odniesienia znajdują się w spoczynku. Dwa ładunki umieszczone nieruchomo w lecącym samolocie spełniają podany warunek. Jeżeli każdy ładunek będzie spoczywał w innym samolocie, a samoloty te z kolei będą leciały w przeciwnych kierunkach, to warunek oczywiście nie będzie spełniony, ponieważ nie można dobrać układu współrzędnych, w którym oba ładunki byłyby jednocześnie w spoczynku. Być może zastrzeżenie co do źródła pola wydaje się mało ważne, ale skorzystamy zeń w dalszej części rozważań. To co powiedziałem, jest wynikiem zastosowania transformacji Lorentza do pola elektrycznego, wynikiem potwierdzonym doświadczalnie w ogromnym zakresie prędkości poruszającego się ładunku.

Mamy już wystarczający zapas informacji, aby przystąpić do spełnienia obietnicy zapowiedzianej na początku. Zbudujmy w tym celu uproszczony model przewodnika. Bez obaw! Uproszczenie nie oznacza rezygnacji ze ścisłości, jest to tylko wybór prostszej drogi postępowania. Otóż niech nasz przewodnik składa się z ładunków dodatnich poruszających się w prawo i ładunków ujemnych poruszających się w lewo. Wielkość ładunku każdego znaku, przypadająca na jednostkę długości przewodnika (gęstość liniowa ładunku λ obserwowana przez nieruchomego obserwatora — układ laboratoryjny), jest stała ($\lambda_+ = \lambda_-$). Ostrożnie! Nasze rozumowanie wymaga bacznej uwagi. Pamiętajcie, w jakim układzie odniesienia prowadzimy kolejny etap rozumowania. Niech nikt nie zostaje w starym układzie, gdy my przeskoczymy do nowego, bo grozi nam straszny galimatias. Dla uproszczenia zapisu wzorów wprowadźmy zgodnie z ogólnie przyjętymi oznaczeniami w mechanice relatywistycznej symbole $\beta = V/c$ oraz $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2/c^2}$.

(7) Tak dla wprawy, a przyda to się później, znajdźmy gęstość ładunku w układzie, w którym ładunki dodatnie będą w spoczynku. Układ taki porusza się razem z ładunkami dodatnimi z tą samą co one prędkością. Obszar zajmowany przez rozkład ładunków dodatnich zwiększy się, wracamy bowiem do układu spoczynkowego ładunków (2). Sam ładunek natomiast nie ulega zmianie (5). Wynika stąd, że gęstość ładunku zmniejszy się i będzie równa λ_+/γ_0 ($\gamma_0 = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$). Podobne rozumowanie możemy zastosować do ładunków ujemnych.

Mamy już przewodnik, w którym płynie prąd. W odległości r od tego ładunku umieszczamy ładunek próbny q. Niech pozostaje on, przynajmniej chwilowo, w spoczynku w układzie laboratoryjnym. Znajdujemy się w układzie laboratorium. Gęstość ładunków dodatnich i ujemnych jest taka sama. Pola elektryczne równoważą się. Wypadkowy wektor natężenia pola jest równy zeru. Wniosek jest gotowy. Przewodnik z prądem nie działa na nieruchomy ładunek. Nadajmy teraz ładunkowi próbnemu prędkość v_0 w kierunku ruchu ładunków dodatnich. I co teraz? W pierwszej chwili chciałoby się powiedzieć, że siła pozostanie równa zeru, bo ładunek porusza się w polu o natężeniu $E = 0$, a przecież dopiero co stwierdziliśmy, że siła działająca na poruszający się ładunek nie zależy od jego prędkości (6). Bądźcie ostrożni! To zdanie jest prawdziwe z pewnym zastrzeżeniem co do źródła pola. A czy zastrzeżenie to jest spełnione w tym przypadku? Prawda, że nie? Co robić? Otóż należy siąść, ale wcale nie płakać, tylko siąść lub, mówiąc zwyczajnie, związać się z ładunkiem próbnym. Przeniesiemy się teraz do układu, w którym ładunek próbny znajduje się w spoczynku. Nazwiemy ten układ układem ładunku próbnego. Przejście do nowego układu wymaga przeliczenia interesujących nas wielkości. W pierwszej kolejności przeliczymy prędkości ładunków dodatnich i ujemnych wyrażone w jednostkach prędkości światła c:

$$\beta_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1-\beta_0\beta}; \quad \beta_- = \frac{\beta_0+\beta}{1+\beta_0\beta}.$$

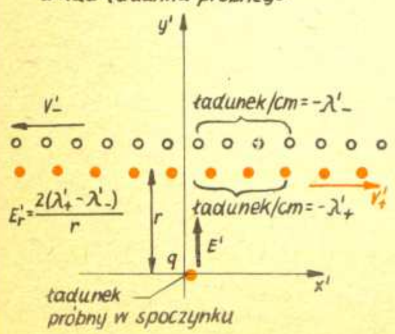
Znamy prędkości ładunków dodatnich i ujemnych w układzie ładunku próbnego, obliczyliśmy (7) gęstości ładunków w swoich własnych układach spoczynkowych. Łatwo obliczyć gęstości ładunków w układzie ładunku próbnego:

$$\lambda'_+ = \gamma'_+ \left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right), \quad \lambda'_- = \gamma'_- \left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\right).$$

Wypadkową gęstość ładunku $\lambda'_+ - \lambda'_-$ możemy wyrazić po pewnych nieco nudnych przekształceniach:

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0}(\gamma'_+ - \gamma'_-) = \frac{\lambda}{\gamma_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_0+\beta}{1+\beta_0\beta}\right)^2}}\right] =$$

$$= -2\lambda\beta_0\beta\gamma = \frac{-2\lambda\gamma V v_0}{c^2}.$$



Znając wypadkową gęstość ładunku znajdziemy natężenie pola elektrycznego. Należy w tym miejscu odszukać w jakimś podręczniku elektrostatyki wyrażenie na pole elektryczne wokół jednorodnie naładowanego walca:

$$E(r) = \frac{2\lambda}{r},$$

stąd

$$E'_r = \frac{4\lambda\gamma V v_0}{rc^2},$$

a więc siła

$$F' = \frac{4q\gamma\lambda V v_0}{rc^2}$$

jest skierowana poprzecznie do kierunku ruchu cząstki i ładunków w przewodniku.
Czeka nas ostatni krok. Musimy przetransformować siłę z powrotem do układu laboratorium. To już umiemy robić (4):

$$F = \frac{1}{\gamma} F' = \frac{4q\lambda V v_0}{rc^2}.$$

Dotarliśmy do miejsca, w którym można podelektować się wynikiem. Zwróćcie uwagę, że $2\lambda v_0$ oznacza wartość natężenia prądu I płynącego w przewodniku, a więc $F = \frac{2qVI}{rc^2}$.

Stwierdzamy, że na ładunek poruszający się równolegle do przewodnika z prądem działa siła skierowana prostopadle do przewodnika i proporcjonalna do prędkości ruchu ładunku. Zadanie można by rozwiązać wprowadzając pojęcie pola magnetycznego. Przewodnik z prądem wytwarza wokół siebie pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}$. Na ładunek poruszający się w tym polu działa siła $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \times \vec{B}$. Jeżeli tylko przypomnimy sobie, czemu równa jest indukcja pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem, to okaże się, że wyprowadziliśmy wzór identyczny. To, że nazywamy pewne wyrażenie indukcją pola magnetycznego, jest kwestią przede wszystkim historyczną. Czy mamy wobec tego prawo twierdzić, że pole magnetyczne nie istnieje? Oczywiście nie. Obserwujemy w przyrodzie szereg zjawisk, które można wytłumaczyć korzystając z pojęcia pola elektrycznego i szeregu innych, które tłumaczymy korzystając z pojęcia pola magnetycznego. Wykazaliśmy, że nie są to wielkości niezależne. Należy pamiętać, że zawsze istnieje pole elektromagnetyczne, którego działanie przejawia się w różny sposób, w zależności od warunków doświadczenia.
Jeżeli chciałbyś, Czytelniku, prześledzić naszkicowane rozumowanie w szczegółach, radzimy Ci zajrzeć do podręcznika E. M. Purcella *Elektryczność i magnetyzm*, 1974, PWN, rozdz. V.
Przedstawiliśmy w ogromnym skrócie informacje o polu elektrycznym i magnetycznym. Pozwoliły one wypełnić te luki, które uniemożliwiały otrzymanie jednolitego obrazu zjawisk elektromagnetycznych. Czy obraz ten jest piękny i pociągający — kwestia gustu. Macie jednak podstawy do samodzielnej oceny. Podobnie nie spodziewam się, że pomimo dostarczenia większości brakujących informacji (reprodukcja jest tylko czarno-biała) o dziewczynie z wachlarzem Piotra Augusta Renoira (1841–1919) podobała się ona wszystkim jednakowo. Można ją jednak ocenić.

Czytelnicy proponują

Mgr inż. J. Kawecki z Warszawy podaje geometryczny sposób znajdowania zespolonych pierwiastków równania kwadratowego

$$ax^2+bx+c = 0$$

o ujemnym wyróżniku:
— w przestrzeni trójwymiarowej rysujemy parabolę

$$y = ax^2+bx+c,$$
$$z = 0;$$

— odbijamy tę parabolę symetrycznie względem jej wierzchołka, a następnie obracamy o kąt 90° względem jej osi (rysunek);
— znajdujemy punkty przecięcia przekształconej paraboli z płaszczyzną $y = 0$.
Otrzymane punkty będą miały współrzędne $(p, 0, q)$ i $(p, 0, -q)$. Poszukiwane pierwiastki to właśnie $p+iq$, $p-iq$, gdzie $i^2 = -1$.
Propozycja jest następująca:
— sprawdzić, czy opisana metoda jest poprawna (dowieść lub obalić);
— podać inne rozwiązanie tego problemu.
Informacje o liczbach zespolonych zamieściliśmy w 3 nrze «Delty».

Rozwiązanie zadania M25

**Podzielmy najpierw zbiór liczb naturalnych uporządkowany rosnąco na odcinki zawierające 2, 2, 4, 8, 16, 32, ... liczb, to znaczy
1 2|3 4|5 6 7 8|9 10 ... 16|17 ... 32|33 ... 64|65 ....
Do pierwszego z szukanych podzbiorów zaliczymy liczby należące do pierwszego, trzeciego, piątego, ... odcinka, do drugiego zaś — należące do drugiego, czwartego, szóstego, ... odcinka.
W żadnym z tak określonych zbiorów nie jest zawarty żaden ciąg arytmetyczny nieskończony. Gdyby bowiem w pierwszym ze zbiorów był ciąg arytmetyczny nieskończony o różnicy r, to różnica między kolejnymi co do wielkości liczbami tego zbioru byłaby $\leqslant r$ (gdyż różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest równa r). Tymczasem różnice takie są dowolnie wielkie, co wynika ze sposobu konstrukcji zbioru. Podobnie dowodzi się, że drugi zbiór nie zawiera ciągu arytmetycznego nieskończonego.**