Klub 44 F

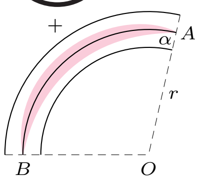
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2020

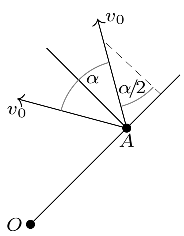
Przypominamy treść zadań:

696. Z punktu A kondensatora cylindrycznego wylatuje lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich. Kąt rozwarcia wiązki wynosi α (rys. 1, 2). Wszystkie jony w wiązce mają taką samą energię. Jony, których prędkość w punkcie A jest prostopadła do odcinka OA, poruszają się po okręgu o promieniu $r_0 = |OA|$, współśrodkowym z okładkami kondensatora. Wykazać, że wiązka jonów ponownie zogniskuje się w pewnym punkcie B, i znaleźć kąt AOB. Wyznaczyć maksymalną szerokość wiązki.

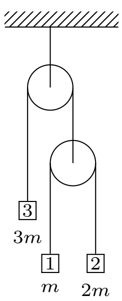
697. W układzie przedstawionym na rysunku 3 oba bloczki nie obracają się, a nitki mogą ślizgać się po nich bez tarcia. Bloczek ruchomy jest nieważki, masy ciężarków są dane. Znaleźć przyspieszenie ciężarka o masie $3m$.



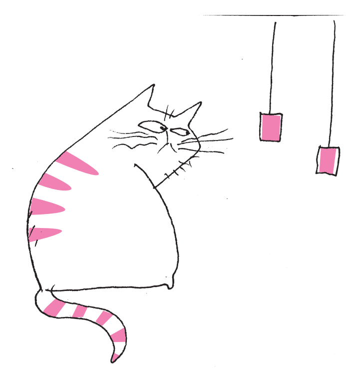
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



696. Linie pola elektrycznego w kondensatorze cylindrycznym skierowane są wzdłuż promieni okładek i w rozważanym przypadku mają zwrot do punktu O. Z prawa Gaussa wartość natężenia pola $E = b/r$, gdzie r jest odległością od punktu O, b stałą proporcjonalności. Przyspieszenie dośrodkowe jonu poruszającego się po orbicie o promieniu r_0 wywołane jest siłą $F = qb/r_0 = m\omega_0^2 r_0$, stąd prędkość kątowa jonu $\omega_0 = \sqrt{qb/(mr_0^2)}$.

Na jon odległy o $r_0 + x$ od środka okręgu O działa w układzie wirującym wokół osi kondensatora siła

$$F_x = -\frac{qb}{r_0 + x} + m\omega^2 (r_0 + x),$$

gdzie ω jest prędkością kątową jonu i możemy ją otrzymać z zasady zachowania momentu pędu:

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega (r_0 + x)^2, \quad \omega = \omega_0 r_0^2/(r_0 + x)^2.$$

Stąd

$$F_x = -\frac{bq\left(2r_0 x + x^2\right)}{(r_0 + x)^3}.$$

Dla $x \ll r_0$

$$F_x = -\frac{2bq}{r_0^2} x = -kx.$$

Jony, których prędkość w punkcie A tworzy mały kąt z prędkością jonów na podstawowej orbicie, wykonują radialne drgania harmoniczne o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{mr_0^2/(2bq)},$$

który jest jednakowy dla wszystkich jonów. Po czasie $T/2$ wszystkie jony, które wystartowały w punkcie A, spotkają się w jednym punkcie B orbity podstawowej. Szukany kąt AOB ma wartość $\varphi = \omega_0 T/2 = \pi/\sqrt{2}$.

Związek między amplitudą drgań w ruchu harmonicznym i maksymalną prędkością ma postać: $x_{\max} = v_{\max} T/(2\pi)$. W naszym przypadku

$$v_{\max} = \omega_0 r_0 \sin\alpha/2 \approx \omega_0 r_0 \alpha/2.$$

Maksymalna szerokość wiązki jonów

$$d = 2x_{\max} = r_0\alpha/\sqrt{2}.$$

697. Ciężarki 1 i 2, o łącznej masie $3m$, ślizgają się po ruchomym bloczku, zatem naprężenie N nici, na której zawieszony jest ten bloczek, jest mniejsze od $3mg$. Ciężarek 3 porusza się w dół, a jego równanie ruchu ma postać $3ma = 3mg - N$, gdzie a jest szukanym przyspieszeniem.

Ponieważ bloczek ruchomy jest nieważki, naprężenie N_1 nici, na której zawieszone są ciężarki 1 i 2, równe jest połowie naprężenia górnej nici: $N_1 = N/2$.

Oznaczmy przez a_1 przyspieszenia ciężarków 1 i 2 w układzie nieinercjalnym związanym z ruchomym bloczkiem. Równanie ruchu układu obu ciężarków ma postać

$$3ma_1 = m(g + a),$$

równanie ruchu ciężarka pierwszego

$$ma_1 = N/2 - mg - ma.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wynik:

$$a = g/17.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 686 ($WT = 3{,}23$) i 687 ($WT = 2{,}4$) z numeru 11/2019

Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Michał Koźlik	Gliwice	39,70
Paweł Perkowski	Ożarów	36,18
Krzysztof Magiera	Łosiów	32,62
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Aleksander Surma	Myszków	27,75
Mateusz Kapusta	Wrocław	25,37
Sławomir Buć	Mystków	22,22