Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

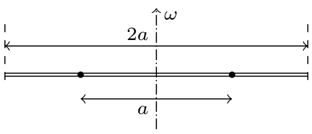
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2019

Zadania z fizyki nr 674, 675

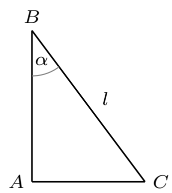
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

674. Nieważki poziomy pręt o długości $2a$ może obracać się swobodnie wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (rys. 1). Na pręt nawleczone są dwie jednakowe kulki, które mogą przemieszczać się wzdłuż pręta bez tarcia i odbijać się sprężyście od odbojników na jego końcach. Na początku kulki umocowane są w odległościach $a/2$ od osi obrotu. Pręt rozkręcono do prędkości kątowej ω_0, po czym kulki jednocześnie oswobodzono. Po jakich torach będą poruszać się kulki? Po jakim czasie pręt wykona pełny obrót? Jaka jest zależność prędkości kątowej pręta od czasu? Rozmiary kulek są dużo mniejsze od długości pręta.



Rys. 1

675. Trzy jednakowe naładowane kulki połączone są nieprzewodzącymi nićmi, które tworzą trójkąt prostokątny ABC (rys. 2). Kąt ABC jest równy α, bok BC ma długość l. Z jakimi przyspieszeniami zaczną poruszać się kulki po przecięciu nici BC? Masa kulki jest równa m, ładunek każdej z nich wynosi q. Sił ciężkości nie uwzględniamy.

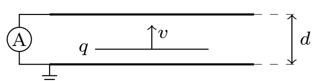


Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 11/2018

Przypominamy treść zadań:

666. Między okładkami kondensatora płaskiego porusza się ze stałą prędkością v cienka płytka naładowana równomiernie ładunkiem q. Znaleźć natężenie prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku. Odległość między okładkami wynosi d, efekty brzegowe można zaniedbać.

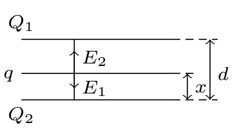


Rys. 3

667. W ustawionym pionowo zamkniętym z dwóch stron cylindrze znajduje się mieszanina dwóch gazów doskonałych o masach molowych μ_1, μ_2 i masach odpowiednio m_1, m_2. Wewnątrz cylindra znajduje się tłok o masie M, który jest przepuszczalny tylko dla gazu pierwszego. Początkowo tłok znajduje się przy górnej podstawie cylindra, a następnie zostaje puszczony swobodnie. Ile moli gazu pierwszego znajdować się będzie po ustaleniu się równowagi powyżej tłoka? Temperatura układu jest stała i wynosi T. Tarcie tłoka o ścianki można zaniedbać. Wysokość cylindra (nie uwzględniając grubości tłoka) jest równa l.

666. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że ładunek płytki jest dodatni. Rozważmy sytuację, gdy płytka naładowana ładunkiem $q > 0$ jest nieruchoma i znajduje się w odległości x od jednej z okładek (rys. 4). Okładki kondensatora są zwarte drutem i uziemione, zatem napięcie między nimi wynosi zero. Wartości natężeń pola elektrycznego w obszarach zaznaczonych na rysunku wynoszą:

$$E_1 = (q - Q_2 + Q_1)/(2\varepsilon_0 S), \quad E_2 = (q + Q_2 - Q_1)/(2\varepsilon_0 S),$$



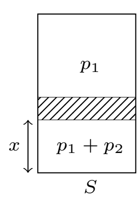
Rys. 4

gdzie $Q_1 < 0$ i $Q_2 < 0$ to ładunki na okładkach kondensatora, S jest powierzchnią płytki. Spełniony jest związek $E_1 x = E_2(d - x)$. Ponieważ potencjał okładek kondensatora wynosi zero, na zewnątrz kondensatora nie ma pola elektrycznego, stąd $q + Q_1 + Q_2 = 0$. Eliminując z powyższych równań E_1, E_2 i Q_2, otrzymujemy związek $qx = -Q_1 d$. Przesunięcie płytki o Δx powoduje zmianę ładunku Q_1 o $|\Delta Q| = q\Delta x/d$, czyli przepływ prądu między okładkami kondensatora o natężeniu

$$I = |\Delta Q|/\Delta t = qv/d.$$

667. W stanie równowagi tyle samo cząsteczek gazu pierwszego przenika przez tłok w obie strony. Ponieważ temperatura T w obu częściach cylindra jest taka sama, liczba moli gazu pierwszego w jednostce objętości po obu stronach tłoka musi być jednakowa, zatem jednakowe jest też ciśnienie p_1 gazu pierwszego po obu stronach tłoka. Niech p_2 oznacza ciśnienie gazu nieprzenikającego przez tłok w dolnej części cylindra (rys. 5). Warunek równowagi tłoka ma postać $Mg = p_2 S$, gdzie S jest polem powierzchni tłoka. Korzystając z równania Clapeyrona dla gazu drugiego, otrzymujemy wyrażenie na odległość x tłoka od dolnej podstawy cylindra: $x = m_2 RT/(\mu_2 Mg)$. Oznaczmy liczbę moli gazu pierwszego w górnej części cylindra przez n_1, a w dolnej przez n_2. Zachodzi związek $n_1 + n_2 = m_1/\mu_1$. Spełnione są też równania Clapeyrona: $p_1(l - x)S = n_1 RT$ oraz $p_1 x S = n_2 RT$. Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy szukaną liczbę moli gazu w górnej części naczynia:

$$n_1 = \frac{m_1}{\mu_1 l}\left(l - \frac{m_2 RT}{\mu_2 Mg}\right).$$



Rys. 5