Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

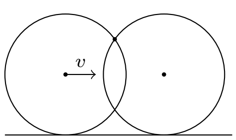
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 672, 673

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2019

672. Na poziomej powierzchni stoi cienka obręcz o promieniu R. Mija ją ze stałą prędkością v taka sama obręcz (rys. 1). Obręcze przylegają do siebie. Znaleźć zależność prędkości górnego punktu „przecięcia” obręczy od odległości między ich środkami.



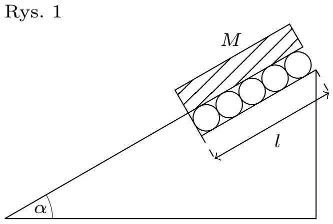
Rys. 1

673. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego. Tłok może przemieszczać się w cylindrze bez tarcia, cylinder i tłok są izolowane cieplnie od otoczenia. Ciśnienie zewnętrzne wynosi p_1, temperatura gazu w cylindrze T_1. W pewnej chwili ciśnienie zewnętrzne wzrasta skokowo do wartości p_2, a po ustaleniu się stanu równowagi spada skokowo do pierwotnej wartości. Znaleźć i porównać temperatury gazu w skrajnych stanach równowagi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2018

Przypominamy treść zadań:

664. Jednorodny klocek o masie M i długości l zaczyna poruszać się w dół po nachylonej płaszczyźnie tworzącej z poziomem kąt α. Początkowy odcinek o długości l nachylonej płaszczyzny wypełniają blisko siebie położone rurki o masach m i promieniach $r \ll l$, które mogą obracać się bez tarcia (rys. 2). Znaleźć zależność przyspieszenia klocka od jego przesunięcia wzdłuż płaszczyzny. Klocek nie ślizga się po rurkach.



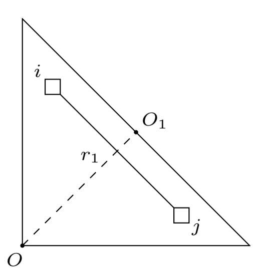
Rys. 2

665. Równomiernie naładowaną na powierzchni cienką płytkę z dielektryka w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego złożono na pół. Wykonana została przy tym praca W przeciw siłom pola elektrycznego. Jaką pracę trzeba wykonać, żeby ponownie złożyć na pół otrzymany trójkąt?

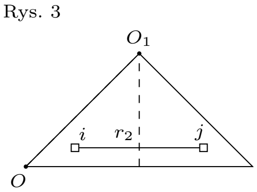
664. Równanie ruchu klocka, gdy jego przesunięcie wzdłuż płaszczyzny wynosi x, ma postać $Ma(x) = Mg\sin\alpha - nT(x)$, gdzie $n = \frac{l-x}{2r}$ jest liczbą rurek stykających się z klockiem, $T(x)$ oznacza siłę tarcia między rurką a klockiem. Ruch obrotowy rurki opisuje równanie $mr^2 \cdot \frac{a(x)}{r} = T(x)r$, stąd $T(x) = ma(x)$. Szukane przyspieszenie dane jest wzorem

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{Mg\sin\alpha}{M + m\frac{l-x}{2r}}, & \text{dla } x \leqslant l, \\ g\sin\alpha, & \text{dla } x > l. \end{cases}$$

665. Niech Q oznacza ładunek płytki, S_1 jej powierzchnię, W_1 energię płytki, czyli sumę energii oddziaływania ładunków na poszczególnych elementach dielektryka. Na rysunku 3 przedstawiono dwa małe elementy płytki o powierzchniach ΔS, odległe od siebie o r_1. Ładunek każdego elementu wynosi $q = \frac{Q\Delta S}{S_1}$, ich energia oddziaływania $W_{ij} \sim \frac{q^2}{r_1}$. Po złożeniu ładunek płytki pozostaje niezmieniony, jej powierzchnia $S_2 = \frac{S_1}{2}$, elementy odpowiadające poprzednio rozważanym mają powierzchnię $\frac{\Delta S}{2}$, a ich odległość wynosi $r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}$ (rys. 4). Energia oddziaływania tych elementów $W_{ij}^{'} = \sqrt{2}W_{ij}$. Całkowita energia złożonego dielektryka wynosi $W_2 = \sqrt{2}\,W_1$. Praca wykonana przy składaniu dana jest wzorem $W = W_2 - W_1 = (\sqrt{2}-1)W_1$. Po kolejnym złożeniu wykonana praca wynosi $W_x = W_3 - W_2$, gdzie energia podwójnie złożonego dielektryka $W_3 = \sqrt{2}W_2$. Szukana praca dana jest wzorem:



Rys. 3



Rys. 4

$$(W_x = (\sqrt{2}-1)W_2 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}W_1 = \sqrt{2}W.$$

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klubu 44F
po zakończeniu
roku szkolnego 2017/18 (po 661 zadaniach)

Marian Łupieżowiec	–	1–41,20
Tomasz Rudny	–	39,04
Jacek Konieczny	–	29,80
Ryszard Woźniak	–	28,77
Krzysztof Magiera	–	3–28,70
Jan Zambrzycki	–	1–23,13
Aleksander Surma	–	4–20,28
Michał Koźlik	–	4–19,20
Jerzy Witkowski	–	3–16,83
Paweł Perkowski	–	2–14,81
Tomasz Wietecha	–	13–14,79
Jacek Grela	–	13,91
Mateusz Kapusta	–	11,49
Dawid Zapolski	–	10,27
Andrzej Nowogrodzki	–	3–9,78
Jędrzej Biedrzycki	–	9,13
Sławomir Buć	–	5,45
Gerard Jachimowicz	–	5,10
Paweł Kubit	–	4,99
Piotr Bielak	–	1,77
Marek Sulczewski	–	0,44

* * *

Po raz pierwszy, odkąd redaguję Klub 44F, zdarzyło się, że zadanie osiągnęło współczynnik trudności $WT = 4$. Mowa o zadaniu **661** z czerwcowego numeru, gdzie należało odpowiedzieć na pytanie, po jakim czasie nić nawinięta na walec – po nadaniu prędkości prostopadłej do nici ciężarkowi na jej końcu – ponownie nawinie się na walec. Może wpływ na to miały letnie upały, chociaż drugie zadanie z czerwca na temat aberracji sferycznej soczewki miało z kolei najniższy współczynnik trudności $WT = 1{,}6$. Część uczestników tej serii ograniczyła się do rozwiązania tylko jednego zadania, inni nadesłali rozwiązania niepoprawne. W szczególności nietrafny był pomysł, że kulka porusza się po spirali Archimedesa, która jest złożeniem ruchu po prostej i obrotu po okręgu o nieruchomym środku. W naszym zadaniu środek okręgu przemieszczał się wzdłuż obwodu walca. Należało również uwzględnić fakt, że po całkowitym odwinięciu nici kulka zatacza półokrąg o promieniu równym długości nici i dopiero wtedy zaczyna nawijać się na walec.

Wydaje się, że uczestnicy klubu coraz więcej energii poświęcają na próby znalezienia rozwiązań w różnych źródłach, co chyba nie jest korzystną tendencją, bo to przecież ma być zabawa.

W zadaniu **659** ($WT = 3{,}1$) pytaliśmy o siłę, z jaką kwadratowa jednorodnie naładowana cienka płytka działa na punktowy ładunek. Ładunek umieszczony został nad środkiem płytki w odległości równej połowie krawędzi płytki, czyli w środku sześcianu, którego jedną ze ścian była płytka. Pozwalało to łatwo obliczyć strumień pola elektrycznego przez powierzchnię płytki i siłę, jaką ładunek działa na płytkę. Wszystkie nadesłane rozwiązania polegały na sumowaniu wkładów do wypadkowej siły od poszczególnych fragmentów płytki, co wymagało wyszukiwania w tablicach odpowiednich całek, i oczywiście takie znęcanie się nie było moim zamiarem. Poprawny wynik otrzymali **Mateusz Kapusta** i **Tomasz Wietecha**. Niektóre rozwiązania polegały na podziale płytki na równoległe cienkie pręty i sumowaniu wkładów. Niestety, pole elektryczne od pręta liczone było z prawa Gaussa, jakby pręt miał nieskończoną długość, podczas gdy odległość ładunku była porównywalna z długością pręta.

Drugie pod względem stopnia trudności okazało się zadanie **647** ($WT = 3{,}95$), gdzie należało znaleźć gęstość ładunku wewnątrz walca obracającego się ze stałą prędkością kątową w jednorodnym, prostopadłym do walca polu magnetycznym. Trzeba tu było wyznaczyć pole elektryczne w płytce, korzystając z warunku równowagi sił działających na swobodny elektron, a następnie z prawa Gaussa wyznaczyć gęstość ładunku.

Trudne okazało się również zadanie **650** ($WT = 3{,}74$), gdzie żadne z proponowanych rozwiązań nie uzyskało oceny wyższej niż 0,2. Polegało ono na znalezieniu czasu, po którym jeden relatywistyczny pojazd dogoni drugi, z punktu widzenia kosmonauty znajdującego się w jednym z pojazdów. W rozwiązaniu przedstawionym w majowej *Delcie* błędnie zapisany został niestety wzór na relatywistyczną prędkość względną – z pierwiastkiem w mianowniku!

Pozostałe zadania zostały rozwiązane bezbłędnie przez co najmniej jedną osobę. Za zadanie **652** ($WT = 2{,}8$ – przyspieszenie metalowej okrągłej płytki spadającej w równoległym do powierzchni Ziemi polu magnetycznym) maksymalną ocenę otrzymał **Dawid Zapolski**, za zadanie **653** ($WT = 2{,}86$ – parcie na dno w obracającym się naczyniu z wodą) **Tomasz Wietecha**. Pan **Tomasz** rozwiązał bezbłędnie czternaście zadań, **Jan Zambrzycki** siedem, **Mateusz Kapusta**, który niedawno rozpoczął przysyłać swoje rozwiązania, trzy.

Wszystkim, którzy przysłali w tym roku rozwiązania zadań, serdecznie dziękuję.

Zadania z matematyki nr 775, 776

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2019

775. Znaleźć wszystkie czwórki liczb nieujemnych a, b, c, d, które jednocześnie spełniają nierówności

$$a + b \geqslant c + d, \quad ab + cd \geqslant (a + b)(c + d), \quad (a + b)cd \geqslant ab(c + d).$$

776. Sześcian o krawędzi długości k przecinamy płaszczyzną π, położoną w odległości d od środka sześcianu. Jaka jest maksymalna wartość d, przy której płaszczyzna π może mieć z każdą ścianą sześcianu co najmniej jeden punkt wspólny?

Zadanie 776 zaproponował pan Adam Woryna.