Ciemna energia – czym jest i czy jest?

*Maciej BILICKI**

* Uniwersytet w Lejdzie, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Konieczność istnienia ciemnej materii (patrz np. Δ^{11}_{18}) to nie koniec niespodzianek, jakie przyszykowały nam obserwacje Wszechświata. Od 20 lat wiemy, że dla pełnego wyjaśnienia składu kosmosu musimy dodać również ciemną energię. To ona miałaby być odpowiedzialna za odkryte w 1998 roku przyspieszanie ekspansji Wszechświata. Oznaczana w równaniach literą Λ i zwana w swej najprostszej formie stałą kosmologiczną, ta forma energii miałaby zaiste niespotykane właściwości: ujemne ciśnienie i stałą gęstość mimo zwiększania się objętości przestrzeni. To ona tworzy przeciwwagę dla wyłącznie przyciągającej grawitacji (która spowalnia ekspansję), a ponieważ ciemnej energii jest odpowiednio dużo (w przeliczeniu na gęstość masy-energii), od kilku miliardów lat zaczęła ona dominować w globalnym bilansie i tempo rozszerzania się Wszechświata wzrasta zamiast maleć.

Odkrycie przyspieszającej ekspansji było zaskoczeniem, natomiast sama obecność Λ w równaniach opisujących Wszechświat już nie. Pojawia się ona już w pierwszych pracach Einsteina na temat ogólnej teorii względności jako stała równań. Z matematycznego punktu widzenia Λ może mieć dowolną wartość, w tym 0; faktyczna wartość Λ ma jednak duży wpływ na jej fizyczną interpretację. Opracowując pierwszy relatywistyczny model kosmologiczny, Einstein uważał, że równania powinny zapewnić statyczność kosmosu w największych skalach (odkrycie, że galaktyki od nas „uciekają", przyszło dopiero kilka lat później). Zauważył, że odpowiednio dobierając (dodatnią) wartość Λ, kompensując tym samym obecność materii, uzyska Wszechświat statyczny. Wkrótce potem Eddington wykazał jednak, że taki model kosmologiczny jest niestabilny na najmniejsze zaburzenia, a odkrycie ucieczki galaktyk przez Sliphera i innych (ujęte przez Hubble'a w związek $d \propto v_{rec}$), wykluczyło poprawność modelu Wszechświata statycznego.

Einstein początkowo nie zdawał sobie sprawy, że dla $\Lambda = 0$, czyli w modelu kosmologicznym zawierającym tylko materię, występuje albo kontrakcja, albo ekspansja Wszechświata – co pokazali dopiero Friedman oraz niezależnie Lemaître kilka lat później. Gdy prace Friedmana i Lemaître'a zdobyły już uznanie wśród ówczesnych kosmologów, sam Einstein wraz z de Sitterem zaproponowali model kosmologiczny z zerową Λ i odpowiednio dobraną gęstością materii (gęstością „krytyczną"), który rozszerzał się od „punktu zerowego" ze stopniowo malejącym tempem ekspansji, zbiegającym do zerowego po nieskończonym czasie. Ten model był „modny", czy wręcz uważany za poprawny, aż do końca lat 1990 z braku rozstrzygających dowodów obserwacyjnych.

Po odkryciu ekspansji Wszechświata i zrozumieniu, że jest ona możliwa również we Wszechświecie wypełnionym wyłącznie materią, Einstein ponoć uznał wprowadzenie Λ za „największą pomyłkę swojego życia" (*biggest blunder*). Historycy nauki i biografowie Einsteina spierają się, czy rzeczywiście tak uważał; stwierdzenie to pochodzi z książki George'a Gamowa, znanego z rozpowszechniania podkoloryzowanych anegdot – Gamow miał być jedynym świadkiem tego wyznania Einsteina. Na ironię zakrawa fakt, że Λ „powróciła" kilka dekad później, i to raczej początkowe nieuwzględnienie możliwości ekspansji („narzucającej" się przy modelowaniu Wszechświata rozwiązaniami równań Einsteina) należy uznać za, być może, największą pomyłkę tego genialnego uczonego.

Jednak niesłuszne byłoby sądzić, że od momentu zakwestionowania statycznego modelu Einsteina aż do końca XX wieku nikt nie rozważał niezerowej wartości Λ. Pojawia się ona zarówno w rozważaniach Friedmana, jak i Lemaître'a (a także Edingtona, de Sittera i innych) już w latach 1920. W szczególności Lemaître badał modele o różnych wartościach Λ i gęstości materii (jako że te dwa składniki wystarczą do opisu zawartości obecnego Wszechświata w największych skalach). To w jego rozważaniach pojawia się uznawany dziś za

Rozwiązanie zadania F 965.
Przyjmijmy, że dla plamy współczynnik transmisji wynosi T, a odbicia R. Niech dla reszty kartki odpowiednie współczynniki wynoszą r i t. Plama „znika", gdy źródło A jest w odległości L_A, a źródło B, w odległości L_B od kartki (patrzymy od strony A). Mamy wówczas (oświetlenia obu części kartki są równe):

$$\frac{rI_A}{L_A^2} + \frac{tI_B}{L_B^2} = \frac{RI_A}{L_A^2} + \frac{TI_B}{L_B^2},$$

czyli

$$\frac{r-R}{L_A^2} I_A = \frac{T-t}{L_B^2} I_B.$$

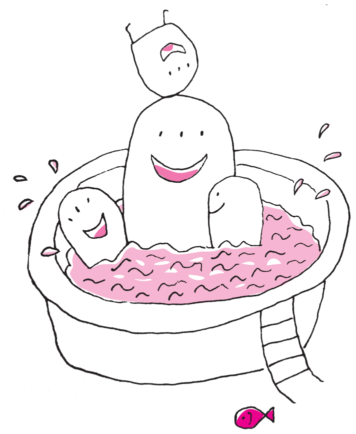
Zamieńmy teraz miejscami źródła światła (obserwujemy kartkę z tej samej strony) i wyznaczmy nowe odległości, dla których plama „znika": l_A i l_B . Otrzymujemy analogiczne równania (B jest teraz od strony obserwatora):

$$\frac{r-R}{l_B^2} I_B = \frac{T-t}{l_A^2} I_A.$$

Po podzieleniu stronami (z obserwacji wiemy, że odpowiednie różnice współczynników są różne od zera) otrzymujemy:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{L_A\, l_A}{L_B\, l_B}.$$

Ze względu na sposób produkcji papieru obie strony kartki różnią się i drugi, niezależny pomiar możemy uzyskać po odwróceniu kartki i powtórzeniu procedury.
Przedstawiony tu fotometr został zaproponowany przez Roberta Wilhelma Bunsena w roku 1843, a ulepszony sposób jego użycia podał D.W. Lewis w *Nature* 40, 174 (1889).



standardowy model zapoczątkowany „punktem zerowym", zwanym dziś Wielkim Wybuchem, po którym następuje spowalniająca ekspansja (era dominacji promieniowania, a następnie materii), która potem przyspiesza (era dominacji stałej kosmologicznej).

Jednak oprócz teoretycznych rozważań Lemaître'a i innych prekursorów kosmologii, Λ przez wiele dekad nie była potrzebna do wyjaśnienia (skąpych) obserwacji – skoro wiadomo było, że Wszechświat się rozszerza, i można to ująć modelem tylko z materią, to brzytwa Ockhama każe nam przyjąć $\Lambda = 0$. Sytuacja jednak zaczęła się zmieniać w latach 1980. Najpierw Alan H. Guth, Andrej Linde i inni zaproponowali, że w pierwszych mikrosekundach swojego istnienia (tj. zaraz po „punkcie zero" w modelu Wielkiego Wybuchu) Wszechświat doświadczył eksponencjalnej ekspansji – „inflacji". Była to próba wyjaśnienia kilku problemów kosmologicznych, takich jak jednorodność Wszechświata w największych skalach – większych niż obszary powiązane przyczynowo-skutkowo, gdyby inflacji nie było. Co ciekawe, taka eksponencjalna ekspansja jest świetnie opisywana modelem de Sittera zawierającym dodatnią Λ i zaniedbywalną gęstość materii. Związek tej „inflacyjnej Λ" z dzisiejszą ciemną energią jest niejasny, ale raczej nie są one tym samym, bo inflacja się zakończyła jakieś 10^{-32} s po Wielkim Wybuchu, po czym przez kilka miliardów lat w kosmosie dominowała materia.

Profesor Roman Juszkiewicz wraz z wieloma współpracownikami badał pod koniec XX w. wielkoskalowe pola *prędkości swoistych* – odstępstwa od jednorodnej ekspansji wynikające z lokalnych zagęszczeń materii. Roman Juszkiewicz miał znaczący udział w opracowaniu aparatu teoretycznego zastosowanego następnie do (skąpych wtedy) danych obserwacyjnych. Te analizy dały niezależne przesłanki, iż gęstość materii wynosi znacznie poniżej krytycznej. Pola prędkości są jednak „nieczułe" na stałą kosmologiczną, tak więc potrzebne były obserwacje supernowych i mikrofalowego promieniowania tła, by połączyć wszystko w jedną całość – ΛCDM.

W kontekście dyskusji o ciemnej energii ważne jest, że jednym z głównych przewidywań teorii inflacyjnej jest globalna płaskość przestrzenna Wszechświata. Innymi słowy, kosmos w największych skalach powinien według teorii inflacji mieć geometrię euklidesową. To tłumaczy popularność modelu Einsteina–de Sittera: płaskiego, zawierającego tylko materię, przez ostatnie dwie dekady XX wieku. Jednak nie wszystkie obserwacje potwierdzały prawdziwość modelu o gęstości równej krytycznej. Badania choćby wielkoskalowych przepływów galaktyk – ze znaczącym udziałem Romana Juszkiewicza – wskazywały, że materii jest za mało, by Wszechświat „domknąć" do gęstości krytycznej. Pogodzenie tego z przewidywaniami inflacji jest możliwe, gdy gęstość materii-energii domknie się do wartości krytycznej dodatnią Λ.

Stąd też i obserwacje odległych supernowych Ia – „świec standardowych" – prowadzone przez Perlmuttera, Riessa i Schmidta, pokazujące, że ekspansja przyspiesza zamiast zwalniać – padły na podatny grunt i doprowadziły do powstania modelu zwanego dziś ΛCDM (gdzie CDM to zimna ciemna materia). Zgodność tego modelu z obserwacjami została od tej pory potwierdzona wieloma różnymi testami. Jednym z najważniejszych jest analiza właściwości mikrofalowego promieniowania tła, która pozwala zarówno z dużą dokładnością ustalić globalną krzywiznę przestrzeni (wynoszącą zero – płaskość), jak i średnią gęstość materii (wynoszącą około 30% gęstości krytycznej). Już te dwa fakty pokazują, że konieczny jest model z $\Lambda > 0$, dopełniającą gęstość masy-energii do wartości krytycznej. Obrazu dopełniają inne dane, choćby bardziej dziś dokładne niż pod koniec XX wieku pomiary tempa ekspansji Wszechświata w funkcji czasu kosmicznego, już nie tylko z supernowych, ale i tzw. barionowych oscylacji akustycznych. Wszystkie one pokazują jednoznacznie, że ekspansja kosmosu przyspiesza.

„Jednoznacznie" to jednak nawet we współczesnej „kosmologii precyzyjnej" duże słowo. Głównym problemem z ciemną energią pozostaje fakt, że nie mamy zupełnie pojęcia, czym mogłaby być w fizycznym sensie. O ile ciemną materię próbuje się wyjaśnić w oparciu o dobrze ugruntowane hipotezy (takie jak cząstki elementarne wykraczające poza model standardowy), to ciemna energia modelowana jest głównie fenomenologicznie. Uznaje się ją za jakiś rodzaj „energii próżni" i w oparciu o obserwacje astronomiczne próbujemy nałożyć ograniczenia na jej równanie stanu. Jak dotąd, ograniczenia te są bardzo słabe i wiemy jedynie, że jest to zgodne w granicach (dużych) błędów z $p = -\rho$, czyli stałą kosmologiczną – najprostszą teoretycznie formą ciemnej energii, dla której ten związek nie zmienia się z czasem. Rozwija się jednak wiele innych modeli, począwszy od „kwintesencji" i jej podobnych (równanie stanu zmienne

Większość modeli kosmologicznych, w tym ΛCDM, zakłada, że Wszechświat w odpowiednio dużych skalach jest jednorodny i izotropowy, dzięki czemu możemy przyjąć wiele symetrii i opisywać go prostą metryką Friedmana–Lemaître'a–Robertsona–Walkera. Niektórzy kosmologowie twierdzą jednak, że jest to nadmierne uproszczenie i właśnie to założenie prowadzi do „artefaktu", jakim jest przyspieszająca ekspansja, pisaliśmy o tym w Δ^1_{16}. W niektórych z modeli „niejednorodnych" nie można globalnie zdefiniować średniej krzywizny czy gęstości, przez co inaczej interpretuje się w nich obserwacje np. supernowych (takie jak związek odległości z przesunięciami ku czerwieni).

w czasie), po zmodyfikowaną grawitację, w której w skrajnych przypadkach Λ nie ma w równaniach w ogóle, jest za to „piąta siła" – dodatkowe oddziaływanie, w wyniku którego grawitacja jest słabsza na bardzo dużych kosmicznych skalach, co skutkuje przyspieszającą ekspansją. Niektórzy natomiast twierdzą, że żadna modyfikacja grawitacji nie jest konieczna, należy natomiast zrewidować nasz opis Wszechświata jako jednorodnego i izotropowego. Według tego rodzaju modeli przyspieszanie ekspansji jest pozorne, a to, że je „widzimy", wynika ze zbyt uproszczonego modelu, w którym obserwacje są interpretowane.

Zarówno modele zmodyfikowanej grawitacji, jak i te zakładające znaczące niejednorodności, mają swoje wady, na pewno nie mniejsze niż standardowy model kosmologiczny, jakim jest ΛCDM. A ponieważ żadne obserwacje kosmologiczne nie wskazują obecnie na znaczne odstępstwa od modelu standardowego (a w każdym razie nie widać, aby jakiś inny model lepiej je wyjaśniał), brzytwa Ockhama odcina wszystko, co nie jest ΛCDM. Czy to się zmieni w najbliższych latach, gdy nowe, większe i głębsze przeglądy kosmosu staną się rzeczywistością? Czy ambitne programy, takie jak Euclid, LSST, JWST czy SKA, przybliżą nas do wyjaśnienia zagadki Λ, czy wręcz przeciwnie?

Jak wyciągnąć $\sqrt{2}$ modulo n?

*Mariusz SKAŁBA**

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niech n będzie liczbą nieparzystą. Pytamy, czy istnieje taka liczba całkowita x, że

(1) $$x^2 \equiv 2 \pmod{n}\,?$$

Jeśli ta kongruencja ma rozwiązanie całkowite x, to na pewno istnieje rozwiązanie $x_1 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wtedy liczba $x_2 = n - x_1$ też jest rozwiązaniem. Jak jednak rozstrzygnąć, czy kongruencja (1) w ogóle ma rozwiązania?

W przypadku, gdy $n = p$ jest liczbą pierwszą, dysponujemy praktycznym algorytmem, który rozstrzyga, czy kongruencja (1) ma rozwiązanie – oparty jest on na tzw. **kryterium Eulera**. Jest ono ściśle związane z **małym twierdzeniem Fermata**. To słynne twierdzenie mówi, że jeśli x nie dzieli się przez liczbę pierwszą p, to wówczas

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jeśli kongruencja (1) ma rozwiązanie x, to możemy napisać

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

a zatem ostatecznie

(2) $$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Kryterium Eulera stanowi, że powyższe rozumowanie można odwrócić: jeśli zachodzi kongruencja (2), to kongruencja (1) ma rozwiązanie. Warto w tym miejscu dodać, że potęgowanie a^k modulo n łatwo wykonać efektywnie nawet wtedy, gdy liczby n oraz k są ogromne! Oto zarys metody. Najpierw zapisujemy wykładnik k w układzie dwójkowym:

$$k = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_l}, \quad \text{gdzie } m_1 < m_2 < \cdots < m_l = \lfloor \log_2 k \rfloor.$$

Ponieważ

$$a^k = a^{2^{m_1}} \cdot a^{2^{m_2}} \cdot \ldots \cdot a^{2^{m_l}},$$

więc wystarczy wykonać m_l kolejnych podnoszeń do kwadratu, a na koniec $l - 1$ mnożeń – wszystkie operacje wykonujemy modulo n, a więc na liczbach mniejszych od n.

Załóżmy teraz, że liczba 2 przeszła test Eulera. Nasuwa się teraz pytanie: jak znaleźć x spełniające kongruencję (1)?

Jeśli $p \equiv 3 \pmod{4}$, to wystarczy przyjąć

$$x \equiv 2^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

Pokazuje to poniższy rachunek

$$x^2 \equiv 2^{\frac{p+1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2^1 \equiv 2 \pmod{p}$$

(na mocy (2)).