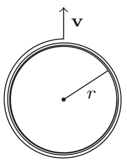
Zadania z fizyki nr 660, 661

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

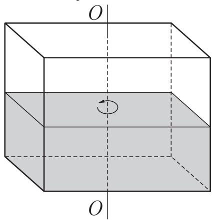
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2018

660. Soczewka płaskowypukła wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}6$. Promień powierzchni wypukłej wynosi $R = 10$ cm, grubość soczewki $d = 0{,}2$ cm. Na powierzchnię płaską soczewki pada równolegle do jej osi optycznej wiązka światła. Gdy odsłonięta jest tylko niewielka część soczewki wokół osi optycznej, promienie ogniskują się na ekranie. Znaleźć średnicę plamki na ekranie po odsłonięciu całej soczewki.

661. Podstawa walca przytwierdzona jest do gładkiej powierzchni poziomej. Nitkę przymocowano jednym końcem do powierzchni bocznej walca przy jego podstawie o promieniu r i owinięto wokół walca k razy (k jest liczbą całkowitą). Do swobodnego końca nitki przyczepiono kulkę i nadano jej prędkość $\mathbf{v}$ skierowaną wzdłuż promienia walca (rys. 1). Po jakim czasie cała nitka ponownie nawinie się na walec?



Rys. 1



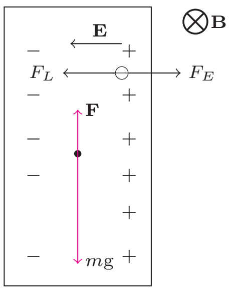
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 2/2018

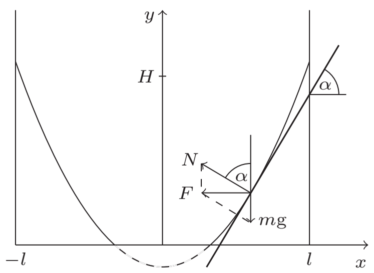
Przypominamy treść zadań:

652. Znaleźć przyspieszenie, z jakim spada pionowo w dół okrągła metalowa płytka o masie m w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, równoległym do powierzchni Ziemi. Płaszczyzna płytki jest równoległa do linii pola magnetycznego i prostopadła do powierzchni Ziemi. Grubość płytki d jest dużo mniejsza od jej promienia R, przyspieszenie ziemskie ma wartość g.

653. Do wąskiego, prostopadłościennego naczynia nalano pewną ilość cieczy (rys. 2). Następnie naczynie zaczęto obracać wokół pionowej osi symetrii. Przy pewnej prędkości kątowej odsłonięta została k-ta część powierzchni dna. Jak zmieniła się w wyniku tego siła parcia na dno i wąskie ścianki boczne (w porównaniu z przypadkiem nieruchomego naczynia)? Ciecz nie wylewa się z naczynia. Napięcie powierzchniowe można zaniedbać.



Rys. 3



Rys. 4

652. Na początku rozważmy przypadek, gdy płytka porusza się pionowo w dół ze stałą prędkością v. Na swobodne elektrony w płytce działa w polu magnetycznym siła Lorentza (rys. 3) $F_L = evB$, gdzie e jest wartością bezwzględną ładunku elektronu. W wyniku tego elektrony przemieszczają się na lewą stronę płytki. Powoduje to powstanie pola elektrycznego E skierowanego jak na rysunku. Elektrony przestają się przemieszczać, gdy siła Lorentza zostaje zrównoważona przez siłę elektryczną $F_E = eE$, czyli zachodzi związek $E = vB$. Ponieważ grubość płytki jest dużo mniejsza od jej promienia, możemy ją traktować jako kondensator płaski, w którym napięcie między powierzchniami wynosi $U = Ed$, a ładunek na powierzchniach $Q = CU = Bv\varepsilon_0 S$, gdzie $S = \pi R^2$ jest powierzchnią płytki. Gdy prędkość płytki rośnie, zmieniają się ładunki na jej powierzchniach, czyli przez płytkę płynie prąd o natężeniu $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 SB\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_0 SBa$, gdzie a jest przyspieszeniem płytki. Na przewodnik z prądem w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna, która w naszym przypadku ma zwrot pionowo w górę i wartość $F = IdB$. Równanie ruchu płytki ma postać $ma = mg - \varepsilon_0 SB^2 da$. Stąd szukane przyspieszenie jest równe $a = \frac{mg}{m+\varepsilon_0\pi R^2B^2d}$.

653. Oznaczmy wysokość słupa cieczy w nieruchomym naczyniu przez h, a rozmiary podstawy naczynia przez $2l$ i a. Zgodnie z treścią zadania $a \ll 2l$, możemy więc przyjąć, że powierzchnia cieczy w obracającym się naczyniu ma kształt jak na rysunku 4.

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest oczywista. Siła parcia na dno równa jest ciężarowi cieczy niezależnie od tego, czy naczynie obraca się, czy pozostaje w spoczynku.

Rozważmy mały element cieczy o masie m na jej powierzchni w obracającym się naczyniu. Działa na niego siła ciężkości mg i siła reakcji N ze strony pozostałej cieczy, prostopadła do jej powierzchni (rys. 4). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą dośrodkową o wartości $F = m\omega^2 x$, gdzie ω jest prędkością kątową, a x odległością elementu cieczy od osi obrotu. Styczna do powierzchni cieczy w badanym punkcie nachylona jest do poziomu pod kątem α i spełnione są związki: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g} = y'(x)$, gdzie funkcja $y(x)$ opisuje kształt powierzchni cieczy. Stąd $y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + c$, a stałą c możemy wyznaczyć z warunków brzegowych. Gdy $y = 0$, $x = kl$, $0 \leqslant k < 1$, zatem $c = -\frac{\omega^2 k^2 l^2}{2g}$. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa i jej objętość stała, możemy wyznaczyć prędkość kątową obracającego się naczynia, przyrównując objętość cieczy w połówce naczynia spoczywającego i obracającego się:

$$alh = a\int\limits_{kl}^{l} y(x)dx = \frac{a\omega^2 l^3}{6g}(1 - 3k^2 + 2k^3),$$

stąd

$$\omega^2 = \frac{6gh}{l^2(1-3k^2+2k^3)}.$$

Wysokość cienkiego słupka cieczy stykającego się z wąską ścianką naczynia wynosi $H = y(l) = \omega^2 l^2 \frac{(1-k^2)}{2g} = \frac{3(1-k^2)h}{1-3k^2+2k^3}$. Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie cieczy na wąską ściankę boczną zmienia się liniowo z wysokością, a jego wartość średnia wynosi $p_r = \frac{\rho g H}{2}$, gdzie ρ jest gęstością cieczy. Szukany stosunek parć na ściankę boczną w obracającym się i nieruchomym naczyniu równy jest $n = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \left(\frac{3(1-k^2)}{1-3k^2+2k^3}\right)^2$. Wynik nie zależy od rodzaju i objętości cieczy, rozmiarów naczynia oraz przyspieszenia grawitacyjnego. Gdy $k = 0$, otrzymujemy $n = 9$.