Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

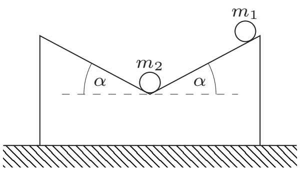
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2018

Zadania z fizyki nr 658, 659

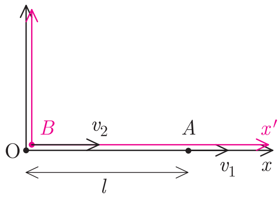
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

658. Kulka o masie m_2 leży na nieważkiej podstawce (rys. 1). Podstawka ma kształt prostopadłościanu połączonego z dwoma stykającymi się klinami o kątach nachylenia α. Nie ma tarcia między podłożem a podstawką. Na prawym klinie położono kulkę o masie m_1 i puszczono swobodnie. Jaki warunek musi być spełniony, aby kulka o masie m_2 zaczęła w wyniku tego wsuwać się na lewy klin? Między kulkami a podstawką również nie ma tarcia.

659. Nieprzewodząca cienka płytka kwadratowa o boku d jest równomiernie naładowana ładunkiem Q. Na osi symetrii płytki prostopadłej do jej płaszczyzny, w odległości $\frac{d}{2}$ od płytki, umieszczono ładunek punktowy q. Znaleźć wartość siły elektrostatycznej działającej na ten ładunek.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2018

Przypominamy treść zadań:

650. Radar na Ziemi obserwuje dwa pojazdy kosmiczne poruszające się z relatywistycznymi prędkościami. Pojazd A porusza się z prędkością v_1, goni go pojazd B, poruszający się w tym samym kierunku z prędkością $v_2 > v_1$. W chwili początkowej odległość między pojazdami wynosi l. Po jakim czasie pojazd B dogoni A z punktu widzenia obserwatora na Ziemi oraz z punktu widzenia kosmonauty w pojeździe B?

651. Dwie jednakowo naładowane kulki o takich samych masach umieszczono w odległości l od siebie i puszczono swobodnie. Po czasie t odległość między nimi wzrosła dwukrotnie. Po jakim czasie wzrośnie dwukrotnie odległość między tymi kulkami, gdy ich odległość początkowa będzie wynosić $3l$?

650. Przyjmijmy, że obserwator O związany z Ziemią i obserwator związany z pojazdem B zsynchronizowali swoje zegary, gdy znajdowali się w tym samym miejscu i tę chwilę uznali za zerową (rys. 2). Zdarzeniem początkowym jest odbicie sygnału radarowego wysłanego z Ziemi od pojazdu A, któremu obserwator O przypisuje współrzędną czasową $t_1 = 0$ oraz współrzędną przestrzenną $x_{A_1} = l$. W układzie statku B to samo zdarzenie zachodzi w chwili $t'_1 = (0 - v_2 l/c^2)/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, w miejscu o współrzędnej przestrzennej $x'_{A_1} = l/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, zgodnie z transformacją Lorentza.

Zdarzenie końcowe – statek B dogania A – zachodzi w układzie Ziemi w miejscu o współrzędnej $x_{A_2} = l + v_1 t_2 = v_2 t_2$, stąd chwila zdarzenia wynosi $t_2 = l/(v_2 - v_1)$. W układzie statku B miejsce zdarzenia ma współrzędną $x'_{A_2} = 0$ i zachodzi w chwili

$$t'_2 = (t_2 - (v_2 x_{A_2}/c^2)/\sqrt{1 - v_2^2/c^2} = t_2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}.$$

W układzie Ziemi statek B dogoni A po czasie $\Delta t = t_2 - t_1 = l/(v_2 - v_1)$.

W układzie statku B szukany czas wynosi

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{l(1 - (v_1 v_2)/c^2)}{(v_2 - v_1)\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}.$$

Ten sam wynik możemy otrzymać ze wzoru $\Delta t' = \Delta x'/v_{A/B}$, gdzie $\Delta x' = x'_{A_2} - x'_{A_1} = -l/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, a $v_{A/B} = (v_1 - v_2)/\sqrt{1 - v_1 v_2/c^2}$ jest prędkością statku A względem B.

651. Oznaczmy odległość początkową między kulkami przez $2x_0$ i obliczmy ich prędkości v, gdy odległość ta osiągnie wartość $2x$. Z zasady zachowania energii otrzymujemy $v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m\varepsilon_0} \cdot \frac{x - x_0}{x x_0}}$, gdzie m jest masą, a q ładunkiem kulki.

Widać, że prędkości kulek zależą od ich położenia względnego k oraz położenia początkowego

$$(*) \qquad v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m\varepsilon_0} \cdot \frac{k-1}{k x_0}}, \quad \text{gdzie } k = x/x_0.$$

Podczas ruchu kulki k zmienia się od 1 do 2. Podzielmy przemieszczenia kulek w obu rozważanych przypadkach na jednakową liczbę odcinków, dla których Δk są takie same. Przemieszczenie kulki przy zmianie k o Δk wynosi $\Delta x = \Delta k x_0$ i w drugim przypadku jest 3 razy większe niż w pierwszym: $\Delta x_2/\Delta x_1 = 3$. Z $(*)$ wynika, że dla danego k prędkość kulki w pierwszym przypadku jest $\sqrt{3}$ razy większa niż w drugim. Przy zmianie k o małe Δk średnie prędkości kulek również będą różnić się $\sqrt{3}$ razy: $v_{śr_1}/v_{śr_2} = \sqrt{3}$. Czasy, w których kulki przemieszczają się o Δx_i, są równe: $\Delta t_i = \Delta x_i/\Delta t_{iśr}$, gdzie $i = 1, 2$. Stosunek tych czasów w rozważanych przypadkach dany jest wzorem $\Delta t_2/\Delta t_1 = 3\sqrt{3}$. Całkowity czas ruchu w drugim przypadku wynosi $t_2 = 3\sqrt{3}t$.