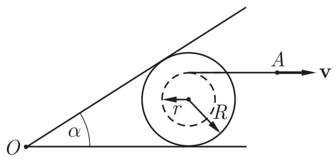
Zadania z fizyki nr 654, 655

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2018

654. Na szpulę o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R nawinięta jest linka (rys. 1). Koniec A linki ciągnięty jest poziomo z prędkością v. Na szpuli opiera się deska, która może obracać się wokół poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O. Szpula toczy się bez poślizgu po powierzchni poziomej. Jaka jest prędkość kątowa deski, gdy tworzy ona z poziomem kąt α?



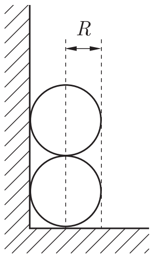
Rys. 1

655. Ciężarek o masie m wisi na nici. Na jaką najmniejszą wysokość należy podnieść ciężarek, aby spadając, rozerwał nić? Minimalna siła wystarczająca do rozerwania nici wynosi $M\mathrm{g}$ (g jest przyspieszeniem ziemskim) i przed rozerwaniem wydłuża ją o a. Zakładamy, że siła naprężenia nici jest proporcjonalna do jej wydłużenia aż do zerwania.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2017

Przypominamy treść zadań:

646. Dwie kulki o jednakowych masach i promieniach R leżą jedna na drugiej na poziomej powierzchni, stykając się ze ścianą (rys. 2). Po zakłóceniu równowagi kulka górna ślizga się wzdłuż ściany, kulka dolna ślizga się po poziomej powierzchni, a ich prędkości początkowe są zerowe. Nie ma tarcia. Znaleźć prędkość kulki dolnej po utracie kontaktu między kulkami.



Rys. 2

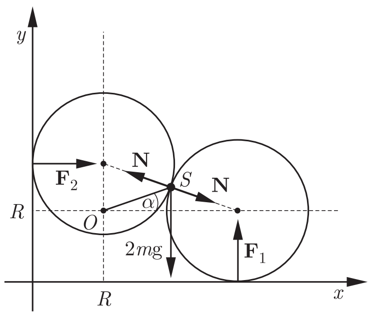
647. Nienaładowany, metalowy walec obraca się z prędkością kątową ω wokół swojej osi. Walec umieszczony jest w jednorodnym polu magnetycznym, którego wektor indukcji $\vec{B}$ jest równoległy do osi walca. Znaleźć gęstość ładunku wewnątrz walca.

646. Dopóki kulki się stykają, środek masy układu S porusza się po okręgu o środku w punkcie O i promieniu R (rys. 3). Siła dośrodkowa spełnia równanie

$$2mv^2/R = 2mg\sin\alpha - F_1\sin\alpha - F_2\cos\alpha,$$

gdzie v jest prędkością środka masy, $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ siłami reakcji ze strony podłoża i ściany, α jest kątem, jaki tworzy wektor położenia środka masy zaczepiony w punkcie O z poziomem. Oznaczając przez N wartość siły oddziaływania między kulkami, możemy zapisać związki $F_2 = N\cos\alpha$, $F_1 = mg + N\sin\alpha$. Gdy kulki przestają się stykać, w położeniu opisanym kątem α_0 mamy $F_2 = 0$, $F_1 = mg$,

(1) $$v^2 = (\mathrm{g}R\sin\alpha_0)/2$$



Rys. 3

Oznaczmy prędkości kulek dolnej i górnej w chwili utraty kontaktu odpowiednio przez $\mathbf{v}_1 = (v_1, 0)$ i $\mathbf{v}_2 = (0, v_2)$. Z definicji środka masy mamy

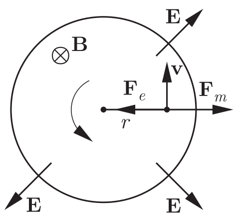
$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2, \text{ zatem } v_x = v\sin\alpha_0 = v_1/2, \ v_y = v\cos\alpha_0 = v_2/2.$$

Ponieważ nie ma tarcia, spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej

$$2mgR = 2mgR\sin\alpha_0 + m(v_1^2 + v_2^2)/2 = 2mgR\sin\alpha_0 + 2mv^2.$$

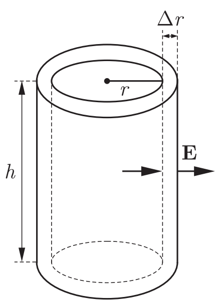
Uwzględniając (1), otrzymujemy: $\sin\alpha_0 = 2/3$, $v^2 = \mathrm{g}R/3$. Szukana prędkość dolnej kulki w chwili utraty kontaktu z górną dana jest wzorem $v_1 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\mathrm{g}R}{3}}$.

647. 1. Rozpatrzmy przypadek, gdy wektory indukcji pola magnetycznego $\mathbf{B}$ oraz prędkości kątowej walca $\boldsymbol{\omega}$ mają zwroty przeciwne (rys. 4). Na swobodny elektron wewnątrz walca, poruszający się po okręgu o promieniu r, działa siła magnetyczna $F_m = e\omega Br$ zwrócona na zewnątrz okręgu (e oznacza wartość bezwzględną ładunku elektronu). Wypadkowa siła działająca na elektron jest siłą dośrodkową, zatem siła elektryczna $F_e = eE$ jest większa od siły magnetycznej i ma zwrot do środka okręgu (E jest natężeniem pola elektrycznego wewnątrz walca). Równanie ruchu elektronu ma postać $m\omega^2 r = eE - e\omega Br$, stąd natężenie pola elektrycznego $E = \omega r(m\omega + eB)/e = \alpha r$ ma zwrot na zewnątrz walca, a jego wartość rośnie liniowo z odległością od środka walca. Rozważmy cienką warstwę cylindryczną o grubości Δr wewnątrz walca (rys. 5). Oznaczając przez $\rho(r)$ gęstość ładunku wewnątrz tej warstwy, możemy zapisać prawo Gaussa $2\pi h\big(E(r+\Delta r)\cdot(r+\Delta r) - E(r)\cdot r\big) = \pi\rho(r)h\big((r+\Delta r)^2 - r^2\big)/\varepsilon_0$, gdzie h jest wysokością walca. Stąd $\rho(r) = 2\varepsilon_0 E(r)/r = 2\varepsilon_0\omega(m\omega + eB)/e > 0$. Gęstość ładunku wewnątrz walca jest stała i dodatnia, ładunek ujemny rozłożony jest na powierzchni walca.



Rys. 4

2. Gdy wektory $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ mają zwroty przeciwne, siła magnetyczna działająca na swobodny elektron ma zwrot do środka okręgu, równanie ruchu elektronu ma postać $m\omega^2 r = e\omega Br \pm eE$. Znak + opisuje przypadek, gdy $\omega > eB/m$, znak $-$, gdy nierówność ma znak przeciwny. Szukana gęstość ładunku dana jest wzorem $\rho = 2\varepsilon_0\omega(m\omega - eB)/e$ i może być dodatnia albo ujemna. Gdy $\omega = eB/m$, gęstość ładunku wynosi 0.



Rys. 5