718. Prawa strona podanej równości ma postać ilorazu K/M (licznik K to iloczyn ośmiu czynników, mianownik M to iloczyn siedmiu czynników). Lewa strona to $L = [a, b, c, d]$. Wystarczy pokazać, że dowolna liczba pierwsza wchodzi do rozkładów liczb K oraz LM w jednakowej potędze (być może zerowej).

Ustalmy więc liczbę pierwszą p i przyjmijmy, że liczby a, b, c, d, K, L, M są podzielne odpowiednio przez p^α, p^β, p^γ, p^δ, p^κ, p^λ, p^μ, ale nie przez $p^{\alpha+1}$, $p^{\beta+1}$, $p^{\gamma+1}$, $p^{\delta+1}$, $p^{\kappa+1}$, $p^{\lambda+1}$, $p^{\mu+1}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\kappa &= \alpha+\beta+\gamma+\delta+\\ &\quad+\min\{\alpha,\beta,\gamma\}+\min\{\alpha,\beta,\delta\}+\min\{\alpha,\gamma,\delta\}+\min\{\beta,\gamma,\delta\},\\ \mu &= \min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}+\\ &\quad+\min\{\alpha,\beta\}+\min\{\alpha,\gamma\}+\min\{\alpha,\delta\}+\min\{\beta,\gamma\}+\min\{\beta,\delta\}+\min\{\gamma,\delta\},\\ \lambda &= \max\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}.\end{aligned}$$

Należy wykazać, że $\kappa = \lambda + \mu$.

Wobec symetrii rozważanych wyrażeń (względem permutacji a, b, c, d) nie tracimy ogólności zakładając, że $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta$. Napisane równości uzyskują postać

$$\begin{aligned}\kappa &= \alpha+\beta+\gamma+\delta+\gamma+\delta+\delta+\delta,\\ \mu &= \delta+\beta+\gamma+\delta+\gamma+\delta+\delta,\\ \lambda &= \alpha;\end{aligned}$$

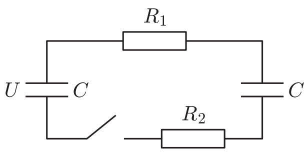
teza $(\kappa = \lambda + \mu)$ gotowa.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

614. Znaleźć ilość ciepła, jaka wydzieli się na każdym z oporników po zamknięciu klucza. Jeden z kondensatorów naładowany był początkowo do napięcia U, drugi nie był naładowany. Pojemności kondensatorów są jednakowe i równe c, wartości oporów wynoszą R_1 i R_2.



615. Stosunek liczby zwojów w uzwojeniu wtórnym transformatora do liczby zwojów w uzwojeniu pierwotnym wynosi $n = 2$. Gdy do uzwojenia pierwotnego przyłożono napięcie przemienne o amplitudzie $U_1 = 100V$, amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym wynosiła $U_2 = 197V$. Jaka będzie amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym, gdy rdzeń transformatora zastąpimy rdzeniem o tych samych wymiarach, ale wykonanym z materiału o przenikalności magnetycznej $k = 10$ razy mniejszej niż w pierwszym przypadku? Rozpraszanie strumienia magnetycznego oraz straty w rdzeniu możemy zaniedbać.

614. Przed zamknięciem klucza energia naładowanego kondensatora wynosi $W_1 = cU^2/2$, a jego ładunek jest równy $q = cU$. Po zamknięciu klucza napięcie na równolegle połączonych kondensatorach ma wartość $U_2 = q/(2c) = U/2$. Energia układu kondensatorów wynosi $W_2 = cU^2/4$ i jest mniejsza od początkowej o wielkość $|\Delta W| = cU^2/4$, równą całkowitemu wydzielonemu ciepłu Q. Natężenie prądu płynącego przez oba oporniki podczas przeładowywania kondensatorów jest w każdej chwili jednakowe, zatem ciepło wydzielone na oporze R_1 dane jest wzorem $Q_1 = R_1Q/(R_1 + R_2)$. Ostatecznie $Q_i = \dfrac{R_icU^2}{4(R_1+R_2)}$, gdzie $i = 1, 2$.

615. Oznaczmy współczynnik samoindukcji uzwojenia pierwotnego w pierwszym przypadku przez L, w drugim przez L'. Współczynnik samoindukcji cewki jest proporcjonalny do przenikalności magnetycznej rdzenia, stąd $L' = L/k$. Uzwojenie możemy traktować jako połączenie szeregowe oporu czynnego R oraz indukcyjnego $L\omega$, gdzie ω jest częstością napięcia zasilającego. Amplituda napięcia na oporze indukcyjnym wynosi $U_L = L\omega U_1/\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}$. Ponieważ zakładamy, że strumienie pola magnetycznego przez uzwojenia pierwotne i wtórne są jednakowe, zachodzi związek $U_2 = nU_L$, stąd $(R/L\omega)^2 = (nU_1/U_2)^2 - 1$. Po zamianie rdzenia amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym dana jest wzorem $U_2' = \dfrac{nU_1}{\sqrt{1+(\frac{kR}{L\omega})^2}} \approx 100$ V. Widać stąd, że dla normalnej pracy transformatora konieczne jest, aby opór czynny uzwojenia pierwotnego był niewielki w porównaniu z oporem indukcyjnym.