Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

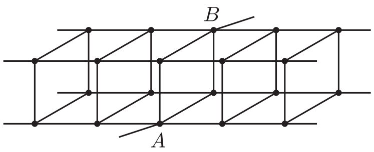
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2015

Zadania z fizyki nr 604, 605

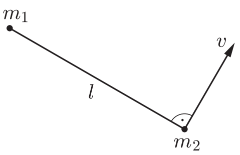
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

604. Znaleźć opór zastępczy między punktami A i B w obwodzie przedstawionym na rysunku 1. Opór każdej krawędzi między węzłami wynosi r. Sieć jest nieskończona w obie strony.



Rys. 1

605. Dwa małe ciała o masach m_1 i m_2 związane są nicią o długości l i poruszają się bez tarcia po powierzchni poziomej. W pewnej chwili okazało się, że ciało o masie m_1 jest nieruchome, a prędkość ciała o masie m_2 ma wartość v i jest prostopadła do nici (rys. 2). Jakie jest w tym momencie naprężenie nici?



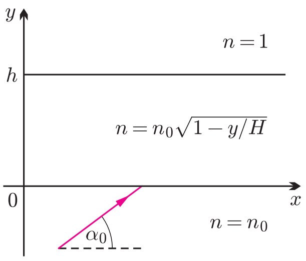
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 6/2015

Przypominamy treść zadań:

600. Naczynie o objętości $2V = 20\,\mathrm{l}$ rozdzielone jest na dwie równe części nieruchomą przegrodą. Do jednej części naczynia wprowadzono argon o masie $m_A = 20\,\mathrm{g}$, do drugiej wodór o masie $m_H = 2\,\mathrm{g}$. Przez przegrodę może przenikać tylko wodór. Jakie ciśnienia ustalą się w obu częściach naczynia po ustaleniu się stanu równowagi? Temperatura w części naczynia zawierającej argon wynosi $T_1 = 300\,\mathrm{K}$, w drugiej części $T_2 = 600\,\mathrm{K}$. Masy molowe argonu i wodoru są odpowiednio równe $m_A = 40\,\mathrm{g/mol}$, $m_H = 2\,\mathrm{g/mol}$.

601. Między dwoma ośrodkami o współczynnikach załamania $n_0 > 1$ i $n_1 = 1$ znajduje się warstwa ośrodka, w którym współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem $n = n_0\sqrt{1-y/H}$, gdzie $H = \text{const}$ (patrz rys. 1). Grubość warstwy wynosi $h = H(1 - 1/n_0^2)$. Z ośrodka o współczynniku załamania n_0 wpada do niejednorodnej warstwy promień światła. Dla jakich wartości kąta α_0 promień wróci do optycznie gęstszego ośrodka? Dla jakiej wartości tego kąta odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia będzie największa?



Rys. 3

600. Stan równowagi nastąpi, gdy zrównają się strumienie wodoru dyfundującego między częściami naczynia. Strumień dyfuzji jest proporcjonalny do średniej liczby zderzeń cząsteczek wodoru z przegrodą, która z kolei jest proporcjonalna do liczby cząsteczek w jednostce objętości oraz średniej prędkości $\langle v\rangle$ ruchu cieplnego cząsteczek. W danej temperaturze zachodzi związek $\langle v\rangle \sim \sqrt{T}$. Oznaczmy przez k liczbę moli wodoru, które przeniknęły przez przegrodę. Warunek równowagi ma postać: $k\sqrt{T_1} = (1-k)\sqrt{T_2}$, stąd $k = \dfrac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}} = 0{,}6$. Ciśnienie w części zawierającej mieszaninę argonu i wodoru wynosi $p_1 = \left(k\ \mathrm{mol} + \dfrac{m_A}{\mu_A}\right)\dfrac{RT_1}{V} = 2{,}7\cdot 10^5$ Pa, w drugiej części $p_2 = (1-k)\ \mathrm{mol}\dfrac{RT_2}{V} = 2{,}0\cdot 10^5$ Pa.

601. Podczas ruchu światła w ośrodku niejednorodnym zmienia się kąt α, jaki tworzy styczna do toru z osią x. Zgodnie z prawem załamania zachodzi związek $n\cos\alpha = n_0\cos\alpha_0$. Rozważmy ruch punktu materialnego, którego prędkość wzdłuż granicy ośrodków jest stała: $v(y)\cos\alpha = v_0\cos\alpha_0$, gdzie v_0 jest prędkością na granicy ośrodków, stąd $v(y) = \dfrac{v_0 n}{n_0}$, $v^2(y) = v_0^2 - \dfrac{v_0^2 y}{H}$. Widzimy, że przy zadanym współczynniku załamania punkt materialny porusza się jak pod działaniem stałej siły skierowanej pionowo w dół. Z zasady zachowania energii mamy bowiem: $\dfrac{mv^2(y)}{2} = \dfrac{mv_0^2}{2} - may$, gdzie a jest stałym przyspieszeniem cząstki i wynosi $a = \dfrac{v_0^2}{2H}$. Korzystając ze wzorów dla rzutu ukośnego w polu stałej siły, otrzymujemy dla $\alpha_0 = \pi/4$ maksymalną odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia z ośrodka niejednorodnego $l_{\max} = \dfrac{2v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{a}$. Promień nie może przy tym przejść do górnego ośrodka jednorodnego, musi więc być spełniony warunek $h \geqslant \dfrac{H}{2}$, czyli $n_0 \geqslant \sqrt{2}$. W przeciwnym przypadku odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia odpowiada takiemu kątowi α_0, dla którego promień jest styczny do górnej granicy rozdziału ośrodków: $n_0\cos\alpha_0 = n(h)\cos 0$, stąd $\cos\alpha_0 = \sqrt{1 - \dfrac{h}{H}}$.