Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2015

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 581 zadaniach

Tomasz Wietecha (Tarnów)	9 – 43,56
Tomasz Rudny (Warszawa)	37,68
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	11 – 31,77
Jacek Konieczny (Poznań)	27,92
Ryszard Woźniak (Kraków)	22,51
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	1 – 20,47
Krzysztof Magiera (Łosiów)	3 – 12,44
Michał Koźlik (Gliwice)	1 – 9,63
Jacek Piotrowski (Rzeszów)	2 – 8,89
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 – 3,08
Paweł Kubit (Kraków)	1,09

Liczba przed pauzą oznacza krotność zdobycia 44 punktów.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

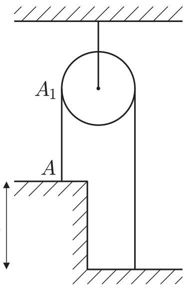
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 592, 593

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

592. Układ składa się z dwóch cienkich soczewek o wspólnej osi optycznej: skupiającej o ogniskowej $f_1 = 3$ cm i rozpraszającej o ogniskowej $f_2 = -2$ cm, ustawionych w odległości $d = 6$ cm. Przedmiot znajduje się w odległości $x_1 = 4$ cm od soczewki skupiającej. Znaleźć konstrukcyjnie położenie obrazu po przejściu promieni przez układ.

593. Cienki, nierozciągliwy łańcuszek o zaniedbywalnie małych ogniwach przerzucony jest przez nieruchomy bloczek (rys. 1). Końce zwisających z bloczka części łańcuszka leżą na stole i na podłodze, przy czym część leżąca na stole jest wystarczająco długa i ułożona w mały kopczyk wokół punktu A (odcinek AA_1 jest pionowy). Znaleźć ustaloną prędkość wiszącej części łańcuszka. Blat stołu znajduje się na wysokości h nad podłogą. Tarcie zaniedbujemy.

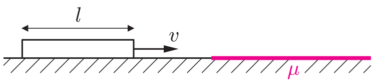


Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 10/2014

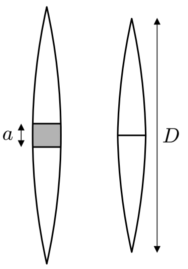
Przypominamy treść zadań:

584. Po gładkiej, poziomej płaszczyźnie ślizga się z prędkością v jednorodny klocek o długości l. Klocek wsuwa się na szorstki odcinek powierzchni o współczynniku tarcia μ (rys. 2). Po jakim czasie klocek zatrzyma się?



Rys. 2

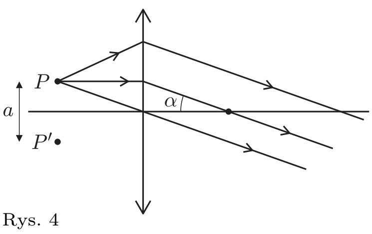
585. Z cienkiej soczewki o ogniskowej $f = 50$ cm usunięto część środkową o szerokości $a = 0{,}6$ mm. Obie połówki soczewki stykają się. Średnica soczewki wynosi $D = 6$ cm. W odległości f od soczewki, na jej osi optycznej, ustawiono punktowe źródło światła monochromatycznego o długości fali $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ m. Z drugiej strony soczewki umieszczony jest ekran. Jakie musi być położenie ekranu, aby można było obserwować na nim prążki interferencyjne? Zakładając, że warunek ten jest spełniony, znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami.



Rys. 3

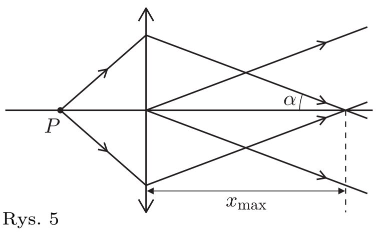
584. Niech $x \leqslant l$ oznacza odległość, na jaką wsunął się na szorstką powierzchnię poruszający się klocek. Działa na niego siła tarcia $F_T = -kx$, gdzie $k = \frac{\mu m g}{l}$. Klocek będzie się poruszał ruchem harmonicznym do chwili, kiedy albo zatrzyma się, albo cały wjedzie na szorstką powierzchnię. Z zasady zachowania energii możemy wyznaczyć amplitudę drgań $A = v\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

Gdy $l \geqslant A$, czyli długość klocka jest nie mniejsza od amplitudy drgań, a stąd $v \leqslant \sqrt{\mu g l}$, klocek zatrzyma się po czasie $t = T/4 = 0{,}5\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$, gdzie T jest okresem drgań.



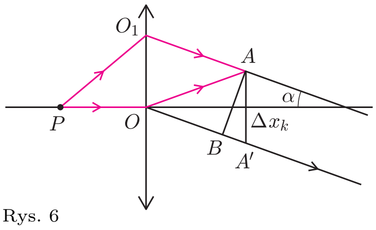
Rys. 4

Gdy $l < A$, klocek wjedzie na szorstką powierzchnię w czasie t_1, poruszając się ruchem harmonicznym, a następnie w czasie t_2 będzie poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym. Droga przebyta ruchem harmonicznym $l = A \sin \omega t_1$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$. Prędkość v_1, jaką osiągnie klocek w chwili t_1, możemy otrzymać z zasady zachowania energii: $\frac{mv^2}{2} = \frac{kl^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}$, stąd $v_1 = \sqrt{v^2 - \mu g l}$. Ruch jednostajnie opóźniony odbywać się będzie w czasie $t_2 = \frac{v_1}{\mu g}$. Klocek zatrzyma się po czasie $t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{v^2 - \mu g l}}{\mu g} + \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\mu g l}}{v}\right)$.



Rys. 5

585. Jeżeli w płaszczyźnie ogniskowej soczewki w odległości $\frac{a}{2}$ od ogniska umieścimy punkt świecący P, to promienie wychodzące z tego punktu po przejściu przez soczewkę



Rys. 6

utworzą wiązkę równoległą nachyloną do osi optycznej soczewki pod kątem α, przy czym $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2f}$ (rys. 4). Po wycięciu części środkowej i zetknięciu połówek soczewki, promienie wychodzące z punktu P tworzą przecinające się wiązki równoległe. Z rysunku 5 widać, że maksymalna odległość, w jakiej można ustawić ekran, aby wiązki te interferowały ze sobą, wynosi $x_{\max} = \frac{D\operatorname{ctg}\alpha}{2} = \frac{Df}{a}$.

Niech ekran znajduje się w dowolnej odległości od soczewki, mniejszej niż $x_{\max}$. Na środku ekranu powstaje maksimum interferencyjne. Aby w p. A w odległości Δx_k od środka ekranu powstało k-te maksimum (rys. 6), promienie PO_1A i POA muszą się wzmacniać, zatem ich różnica dróg optycznych wynosi $\Delta s = k\lambda$. Droga optyczna promienia OA jest taka sama jak promienia OA'. Promienie z wiązki równoległej mają w punktach A i B zgodne fazy, zatem $\Delta s = 2\Delta x_k \sin\alpha \approx 2\Delta x_k \frac{a}{2f}$. Odległość między sąsiednimi prążkami wynosi $\Delta x = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = \frac{f\lambda}{a} = 0{,}5$ mm.

* * *

W ubiegłym roku najtrudniejsze okazało się zadanie 570, gdzie należało znaleźć przyspieszenie pręta poruszającego się w rurze z wodą. Jego współczynnik trudności wyniósł 3,90. Gdy pręt podnosi się, pewna masa wody porusza się do dołu, zapełniając oswobodzone miejsce. Siła działająca na pręt ze strony wody zależy od przyspieszenia tej wody. Prawo Archimedesa w postaci: siła wyporu równa jest ciężarowi wypartej cieczy, nie ma w tym przypadku zastosowania, a tak właśnie próbowali rozwiązać zadanie uczestnicy klubu. Trudne okazało się też zadanie 563 ($WT = 3{,}40$), które zresztą, jak słusznie wytknął mi **Andrzej Idzik**, pojawiło się już w *Delcie* w 1986 r. Trzeba było w nim obliczyć prędkość, jaką należy nadać ładunkowi punktowemu w środku wydrążonej metalowej kuli, aby oddalił się do nieskończoności przez wąską szczelinę w tej kuli. W nadesłanych rozwiązaniach uwzględniano na ogół oddziaływanie ładunku punktowego z ładunkami indukowanymi na powierzchniach kuli, natomiast nie uwzględniano oddziaływania między ładunkami indukowanymi na obu powierzchniach. W zadaniu 577, odpowiadając na pytanie, jaką prędkość uzyska walec po wyłączeniu pola magnetycznego, w którym był umieszczony, rozwiązujący zaniedbali zjawisko samoindukcji. Zadanie 575 (wciąganie cieczy dielektrycznej do kondensatora) część klubowiczów rozwiązała poprawnie, poszukując minimum energii takiego układu, część jednak uznała, że przyrost energii potencjalnej grawitacji rekompensowany jest obniżeniem energii elektrostatycznej, powtarzając błąd szeroko dyskutowany po jednej z matur jeszcze przed reformą. Niektóre błędy trzymają się więc mocno. Zadanie 576, gdzie klocki połączone sprężyną zsuwały się z równi, dwóch uczestników rozwiązało w układzie związanym z równią, wykazując się imponującą sprawnością rachunkową. Warto jednak było zrobić to w układzie związanym ze środkiem masy, co zdecydowanie upraszczało obliczenia i pozwalało łatwiej uchwycić istotę tego ruchu.

Dziękuję wszystkim, którzy nadsyłali rozwiązania, zapewniając mi sprzężenie zwrotne, przepraszam za niedociągnięcia i literówki, których nie udało się uniknąć. Podobnie jak w roku ubiegłym, wyrażam szczególne uznanie za sposób prezentacji na ogół bezbłędnych rozwiązań i ich dyskusję przez **Tomasza Wietechę**.

E. Z.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2015

Zadania z matematyki nr 695, 696

Redaguje Marcin E. KUCZMA

695. Znaleźć wszystkie pary wielomianów rzeczywistych P, Q, spełniające równanie

$$\frac{P(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{Q(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

696. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów, jakie można rozmieścić na płaszczyźnie tak, by każde trzy spośród nich były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 696 zaproponował pan Krzysztof Kamiński z Pabianic.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2014

Przypominamy treść zadań:

687. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych 39 kolejnych liczb naturalnych znajdzie się liczba, której suma cyfr dzieli się przez 11.

688. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$. Na krawędziach SA, SB, SC leżą takie punkty X, Y, Z, że suma kwadratów pól trójkątów SXY, SYZ, SZX jest równa kwadratowi pola trójkąta XYZ. Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCS$.