Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2015

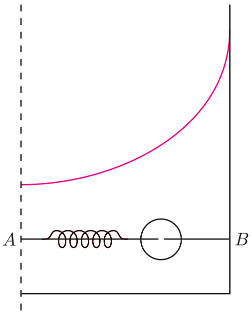
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 590, 591

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

590. W naczyniu w kształcie walca znajduje się ciecz o gęstości ρ. Walec obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół własnej osi. Wewnątrz walca, wzdłuż jego promienia, umocowany jest cienki pręt AB. Po pręcie może ślizgać się bez tarcia koralik w kształcie kuli o masie m i promieniu r (rys. 1). Kula połączona jest z końcem A pręta za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k. Długość nieodkształconej sprężyny wynosi l_0. Znaleźć odległość środka kuli od osi obrotu.



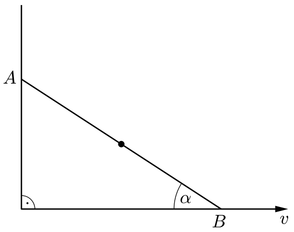
Rys. 1

591. Na sferze o promieniu R, złożonej z dwóch półsfer, równomiernie rozłożony jest ładunek Q. Jaką siłą trzeba działać na każdą półsferę, aby nie rozsuwały się one pod wpływem oddziaływania ładunków?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2014

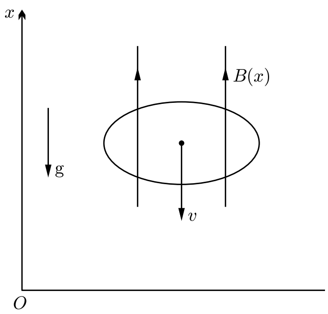
Przypominamy treść zadań:

582. W środku nieważkiego pręta o długości $2l$ przyczepiona jest mała kulka o masie m. Pręt porusza się jak na rysunku 2. Koniec B pręta porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością v, koniec A porusza się wzdłuż pionowej ściany. Jaką siłę reakcji wywiera pręt na kulkę, gdy tworzy z poziomem kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$?



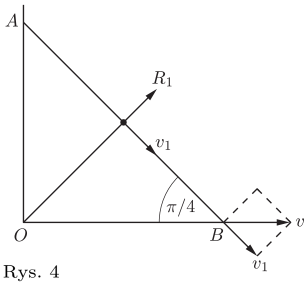
Rys. 2

583. Metalowy pierścień o promieniu l i oporze R spada pod działaniem siły ciężkości w polu magnetycznym. Wartość wektora indukcji magnetycznej w kierunku pionowym zmienia się z wysokością zgodnie ze wzorem $B(x) = B_0(1 - \alpha x)$, gdzie stała α jest dodatnia (rys. 3). Znaleźć zależność siły hamującej ruch pierścienia od jego prędkości. Płaszczyzna pierścienia pozostaje prostopadła do linii pola magnetycznego.



Rys. 3

582. Kulka porusza się po okręgu o środku w punkcie O (rys. 4), bo znajduje się w połowie przeciwprostokątnej trójkąta AOB. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$, prędkość kulki jest skierowana wzdłuż pręta i ma wartość $v_1 = \frac{v\sqrt{2}}{2}$, bo wszystkie punkty sztywnego pręta mają taką samą składową prędkości wzdłuż pręta. Oznaczając przez R_1 składową siły reakcji prostopadłą do pręta i przyjmując, że ma ona zwrot jak na rysunku, możemy napisać wzór na siłę dośrodkową: $\frac{mv_1^2}{l} = \frac{m\mathrm{g}\sqrt{2}}{2} - R_1$. W kierunku poziomym kulka porusza się ze stałą prędkością $\frac{v}{2}$, bo przebywa drogę dwukrotnie mniejszą niż koniec pręta B. Zatem przyspieszenie kulki oraz wypadkowa siła reakcji mają kierunek pionowy. Wartość siły reakcji wynosi: $R = R_1\sqrt{2} = m\left(\mathrm{g} - \frac{v^2\sqrt{2}}{2l}\right)$. Gdy $v^2 < \sqrt{2}\,\mathrm{g}l$, siła ta zwrócona jest do góry.



Rys. 4

583. Podczas spadania zmienia się strumień pola magnetycznego przez powierzchnię pierścienia i powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right| = \pi l^2 B_0 \alpha v$. Energia potencjalna ciężkości zamienia się na ciepło wydzielone w pierścieniu oraz energię kinetyczną pierścienia: $m\mathrm{g}\Delta x = \frac{\mathcal{E}^2\Delta t}{R} + \frac{m\Delta v^2}{2}$. Dla małych przedziałów czasowych Δt mamy: $m\mathrm{g}v = \frac{\mathcal{E}^2}{R} + mva$, gdzie a jest przyspieszeniem pierścienia. Równanie ruchu pierścienia ma postać: $ma = m\mathrm{g} - F$, gdzie $F = \frac{\pi^2 l^4 B_0^2 \alpha^2 v}{R}$ jest szukaną siłą hamującą. Jakie jest pochodzenie tej siły? Siła elektrodynamiczna, działająca na pierścień w polu magnetycznym o liniach pionowych, działa w płaszczyźnie pierścienia i nie wpływa na jego ruch. Jednak w sytuacji opisanej w zadaniu pole magnetyczne musi mieć składową leżącą w płaszczyźnie pierścienia i prostopadłą do pierścienia. W przeciwnym przypadku strumień pola magnetycznego przez powierzchnię walcową o osi pionowej byłby różny od zera. Ponieważ płaszczyzna pierścienia pozostaje pionowa, pole musi być symetryczne względem osi pierścienia. Zgodnie z prawem Gaussa $\pi l^2 B_0 \alpha \Delta x = 2\pi l B_1 \Delta x$, gdzie B_1 jest poziomą składową pola magnetycznego, prostopadłą do pierścienia. Siła elektrodynamiczna hamująca pierścień to $F = \frac{2\pi l B_1 \mathcal{E}}{R}$. Ten sam wynik otrzymamy, traktując pierścień z prądem jako dipol o momencie magnetycznym $\mu = \frac{\pi l^2 \mathcal{E}}{R} = q_m \Delta x$, gdzie q_m jest ładunkiem magnetycznym dipola. Siła hamująca wynosi $F = q_m B_0 \alpha \Delta x$.