Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2014

Zadania z matematyki nr 677, 678

Redaguje Marcin E. KUCZMA

677. Rozważamy trójki liczb rzeczywistych (x, y, z), spełniające warunki
$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad x^2+y^2+z^2>yz+zx+xy.$$
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz.

678. Czy istnieją takie trzy różne liczby pierwsze p, q, r, że liczba $2^{q-1}-1$ dzieli się przez p, liczba $2^{r-1}-1$ dzieli się przez q, zaś liczba $2^{p-1}-1$ dzieli się przez r?

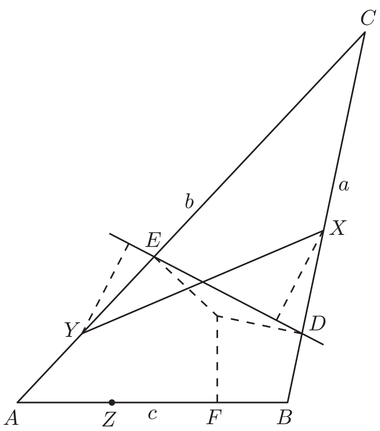
Zadanie 678 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

Rozwiązania zadań z numeru 11/2013

Przypominamy treść zadań:

669. W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z zostały obrane odpowiednio na bokach BC, CA, AB tak, że $|AY|=|AZ|$, $|BX|=|BZ|$. Dowieść, że prosta DE połowi odcinek XY.

670. Udowodnić nierówność
$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1}+\frac{b^2+1}{c^2+a+1}+\frac{c^2+1}{a^2+b+1}\geqslant 2$$
dla liczb rzeczywistych $a, b, c>-1$.



669. Przyjmijmy zwykłe oznaczenia: $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$. Równości
$$|CX|=a-|BX|=a-|BZ|, \qquad |CY|=b-|AY|=b-|AZ|$$
dodajemy stronami i otrzymujemy
$$|CX|+|CY|=a+b-c=2\cdot|CD|=2\cdot|CE|.$$
To znaczy, że punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej DE, w jednakowych odległościach od odpowiednich końców odcinka DE:
$$|DX|=|EY|.$$
Wobec równoramienności trójkąta CDE oznacza to z kolei, że punkty X i Y leżą w jednakowych odległościach od prostej DE. Stąd już wynika, że ta prosta przechodzi przez środek odcinka XY.

670. Niech M będzie średnią arytmetyczną liczb a^2, b^2, c^2. Oznaczmy:
$$\frac{a^2+1}{M+1}=1+3x, \qquad \frac{b^2+1}{M+1}=1+3y, \qquad \frac{c^2+1}{M+1}=1+3z.$$
Suma liczb napisanych po lewych stronach wynosi 3. Zatem i suma liczb po prawych stronach wynosi 3; a to znaczy, że $x+y+z=0$. Stąd
$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\big((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\big)\leqslant 0.$$
W nierówności danej do udowodnienia wyodrębniamy pierwszy składnik i szacujemy z góry jego mianownik:
$$b^2+c+1\leqslant b^2+1+\frac{c^2+1}{2}=(M+1)(1+3y)+\frac{1}{2}(M+1)(1+3z)=$$
$$=\frac{3}{2}(M+1)(1+2y+z).$$
Liczba b^2+c+1 jest dodatnia (tu korzystamy z założenia, że $c>-1$), zatem po prawej stronie ostatniej nierówności mamy również liczbę dodatnią, i wobec tego
$$\frac{1}{b^2+c+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{M+1}\cdot\frac{1}{1+(2y+z)}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{M+1}\cdot\big(1-(2y+z)\big).$$
Stąd
$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1-(2y+z)}{M+1}\cdot(1+3x)(M+1)=\frac{2}{3}(1-2y-z+3x-6xy-3xz).$$
Mamy też analogiczne oszacowanie dla pozostałych dwóch składników zadanej nierówności. Po dodaniu stronami otrzymujemy (pamiętając, że $x+y+z=0$ oraz $xy+yz+zx\leqslant 0$):
$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1}+\frac{b^2+1}{c^2+a+1}+\frac{c^2+1}{a^2+b+1}\geqslant\frac{2}{3}\big(3-9(xy+yz+zx)\big)\geqslant 2.$$