Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

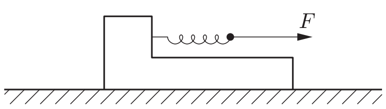
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 572, 573

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014

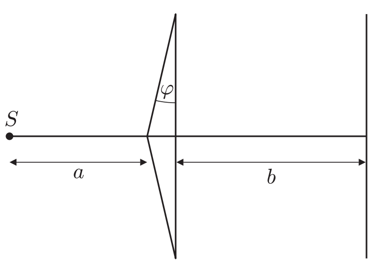
572. Dynamometr ciągnięty jest po gładkim poziomym stole siłą $F = 4\text{N}$ (rys. 1). Co wskazuje dynamometr, jeżeli masa sprężyny równa jest masie obudowy? Dynamometr został wyskalowany w położeniu poziomym.



Rys. 1

573. Na bipryzmat przedstawiony na rysunku 2 pada światło monochromatyczne ze źródła punktowego S. Na ekranie powstaje obraz interferencyjny. Znaleźć odległość pierwszego maksimum interferencyjnego od środka ekranu. Dane są: a – odległość źródła od bipryzmatu, b – odległość bipryzmatu od ekranu, φ – kąt łamiący każdego z pryzmatów, który jest bardzo mały, n – współczynnik załamania szkła, z którego wykonany jest bipryzmat, λ – długość fali światła emitowanego przez źródło. Promienie interferujące padają na ekran prawie prostopadle.

Wskazówka. Należy wykazać, że każdy z pryzmatów daje pozorny obraz źródła światła, którego przybliżona odległość od pryzmatu jest taka sama jak źródła.

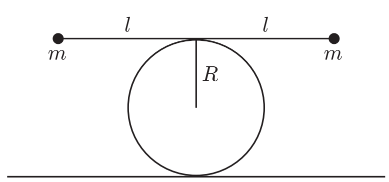


Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

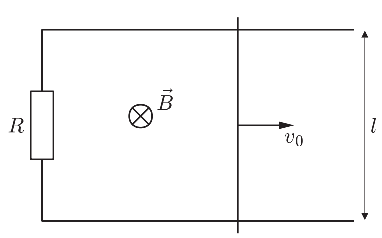
Przypominamy treść zadań:

564. Na nieruchomym walcu o promieniu R leży nieważki pręt o długości $2l$, na którego końcach znajdują się małe kulki o masach m (rys. 3). Znaleźć okres małych drgań pręta wokół położenia równowagi. Nie ma poślizgu między walcem a prętem.



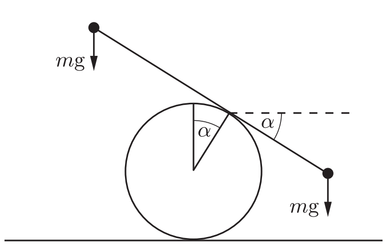
Rys. 3

565. Po równoległych, poziomych szynach spiętych oporem R może poruszać się bez tarcia pręt o masie m. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B. Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny szyn (rys. 4). Odległość między szynami wynosi l. W chwili początkowej prętowi nadano prędkość v_0, równoległą do szyn. Jaką drogę przebędzie pręt do momentu zatrzymania? Jaki ładunek przepłynie w tym czasie przez opór R? Opór szyn i pręta zaniedbujemy.



Rys. 4

564. Po wychyleniu pręta o kąt α z położenia równowagi (rys. 5) działa na niego moment skręcający do położenia równowagi $M = mg[(l - R\alpha) - (l + R\alpha)]\cos\alpha$. Dla małych wychyleń z położenia równowagi $M \approx -2mgR\alpha$. Ponieważ nie ma poślizgu, ruch pręta jest czystym obrotem względem chwilowej osi przechodzącej przez punkt styczności pręta z walcem, a jego moment bezwładności względem tej osi to $I \approx 2ml^2$. Równanie ruchu obrotowego ma postać $I\varepsilon = M$, gdzie $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$ jest przyspieszeniem kątowym. Jest to równanie ruchu harmonicznego: $d^2\alpha/dt^2 + \mathrm{G}R\alpha/l^2 = 0$. Częstość drgań wynosi $\omega = \mathrm{g}R/l^2$, szukany okres drgań $T = 2\pi l/\sqrt{\mathrm{g}R}$.



Rys. 5

565. W poruszającym się pręcie indukuje się siła elektromotoryczna indukcji. Jej wartość, zgodnie z prawem Faradaya, wynosi $\varepsilon = Blv$, gdzie v jest chwilową prędkością pręta. Na pręt, w którym płynie prąd indukcyjny, działa hamująca siła elektrodynamiczna o wartości $F = B^2l^2v/R$. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki $F\Delta t = \Delta p$ i możemy napisać: $B^2l^2v\Delta t/R = m\Delta v$. Wyrażenie $\Delta s = v\Delta t$ jest drogą przebytą w przedziale czasu Δt. Po zsumowaniu otrzymujemy $B^2l^2s/R = mv_0$. Szukana droga przebyta przez pręt wynosi $s = mv_0R/(B^2l^2)$. Chwilowe natężenie prądu indukcyjnego w obwodzie dane jest wzorem $I = Bvl/R$, a z definicji natężenia prądu $I = \Delta Q/\Delta t$, gdzie ΔQ jest ładunkiem przepływającym w czasie Δt przez opór. Stąd dla krótkich przedziałów czasowych mamy $\Delta Q = Bl\Delta s/R$. Po zsumowaniu i uwzględnieniu poprzednich wyników otrzymujemy szukany ładunek równy $Q = mv_0/(Bl)$.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 –	43,72
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 –	37,67
Tomasz Rudny (Warszawa)		35,20
Dariusz Wilk (Rzeszów)		26,57
Jacek Konieczny (Poznań)		24,15
Tomasz Wietecha (Tarnów)	9 –	17,44
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	1 –	12,68

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2011–2013 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (11), T. Wietecha (9), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni": M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

„jednokrotni": A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

W ostatnich latach zakres umiejętności matematycznych nabywanych w liceum bardzo się skurczył, w szczególności dotyczy to rachunku różniczkowego. Dlatego wszystkie zadania z fizyki zaproponowane w ubiegłym roku w Klubie 44F można było rozwiązać, posługując się elementarną matematyką. Wymagało to czasami wyboru odpowiedniego układu odniesienia. Na przykład, w zadaniu 543, gdzie należało wyznaczyć naprężenie ograniczającej ruch biegnącego psa linki zakończonej pierścieniem przesuwającym się po drucie, wygodnie było wybrać układ odniesienia związany z pierścieniem, co pozwalało sprowadzić problem do ruchu jednego ciała. Podobnie w zadaniu 561 z kondensatorem w polu magnetycznym najwygodniej było prowadzić rozważania w układzie odniesienia, w którym nie ma pola elektrycznego. Niekiedy potrzebny był sprytny pomysł, jak w zadaniu 546 z wodą wyciekającą spod naczynia. Okazuje się jednak, że większość uczestników ligi rachunkiem różniczkowym i całkowym posługuje się biegle, toteż przysyłane rozwiązania często różniły się od firmowych – i były bardziej pracochłonne.

W konkurencji „najwyższy stopień trudności" pierwsze miejsce ($WT = 2{,}7$) zajęło zadanie 553 (ładowanie kondensatora przez diodę o znanej charakterystyce). Błędy były tu dosyć urozmaicone, najczęściej nie uwzględniano faktu, że podczas pierwszego etapu ładowania na diodzie jest niezerowe napięcie. Zaskoczeniem był stosunkowo wysoki stopień trudności ($WT = 2{,}44$) zadania 554 (zsuwanie się pierścienia z gumowego kabla), gdzie w kilku rozwiązaniach nie uwzględniono w bilansie energetycznym zmiany energii sprężystości kabla rozciąganego podczas ruchu pierścienia.

Na szczególne uznanie zasługuje sposób prezentacji rozumowań przez Tomasza Wietechę, który przysłał propozycje rozwiązań wszystkich zadań, konkurując w poszczególnych seriach o palmę pierwszeństwa z Andrzejem Idzikiem i Michałem Koźlikiem.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014

Zadania z matematyki nr 675, 676

Redaguje Marcin E. KUCZMA

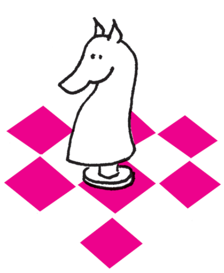
675. Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości n wybieramy losowo jedno. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

676. W trójkącie o bokach długości a, b, c, o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od $120°$, znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi d. Dowieść, że zachodzi równość $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$.

Zadanie 676 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

Przypominamy treść zadań:



667. Kwadratowa plansza o rozmiarach $n \times n$ ma pola pokolorowane jak szachownica; n jest ustaloną liczbą parzystą. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy dowolny prostokąt, złożony z pól planszy, i zmieniamy kolory wszystkich pól w obrębie tego prostokąta (białe na czarne, czarne na białe). Wyznaczyć najmniejszą liczbę ruchów wystarczającą, by wszystkie pola planszy uzyskały jednakowy kolor.

668. Czy istnieje podzbiór właściwy zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są działania mnożenia i dzielenia, nie zawierający się w żadnym innym podzbiorze właściwym zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są powyższe działania?

667. Rozważamy pola brzegowe (przylegające co najmniej jednym bokiem do brzegu szachownicy). Zliczamy pary sąsiadujących pól brzegowych, mających różne kolory. Na starcie liczba takich par wynosi $4(n-1)$; w stanie docelowym wynosi 0. Jeden ruch może zmniejszyć liczbę takich par co najwyżej o 4. Zatem liczba ruchów, po których plansza może stać się jednokolorowa, jest nie mniejsza niż $n-1$.