Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

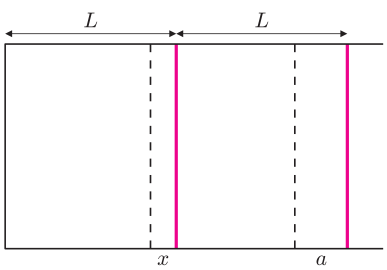
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2013

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

556. W poziomym cylindrze, w odległościach L i $2L$ na prawo od zamkniętego końca znajdują się dwa tłoki (rys. 1), które mogą przemieszczać się bez tarcia (grubości tłoków pomijamy). W lewej części znajduje się para wodna pod ciśnieniem p_0, w prawej powietrze o takim samym ciśnieniu. Ciśnienie pary nasyconej wody w danej temperaturze wynosi $2p_0$. Prawy tłok został wolno wepchnięty na odległość a. O ile przesunął się lewy tłok? Temperatura jest stała.

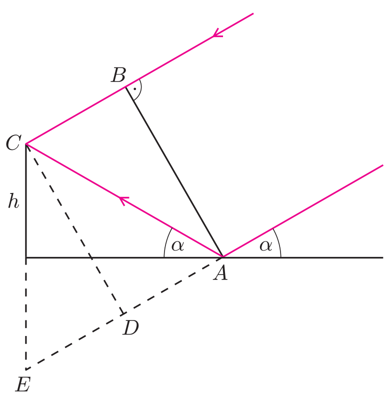


Rys. 1

557. Detektor fal radiowych znajduje się na brzegu jeziora na wysokości h nad poziomem wody. Rejestruje on sygnały wysyłane przez satelitę wznoszącego się nad horyzontem. Przy jakich kątach wzniesienia satelity nad horyzontem obserwuje się maksima sygnału? Długość fali emitowanej przez satelitę wynosi λ. Przyjmujemy, że powierzchnia jeziora jest idealnie gładka.

556. Rozważmy proces do chwili, gdy para wodna osiągnie stan nasycenia. Traktując oba gazy jako doskonałe, możemy dla każdego z nich napisać prawo przemiany izotermicznej: $p_0L = p_1(L-a+x) = p_1(L-x)$, gdzie x jest przesunięciem tłoka lewego, zatem $x = a/2$. Ciśnienie p_1 nie przekracza ciśnienia pary nasyconej: $p_0L \leqslant 2p_0(L-a/2)$, stąd $a \leqslant L$, $x \leqslant L/2$.

Gdy $a > L$, para wodna w lewej komorze zaczyna się skraplać, ciśnienie ma stałą wartość $p = 2p_0$, a objętości gazów w obu częściach są takie same (zaniedbujemy objętość wody powstałej w wyniku skroplenia w porównaniu z objętością pary nasyconej o tej samej masie). Oznaczając dodatkowe przesunięcia obu tłoków przez Δx, możemy napisać: $\Delta x = a - L = x - L/2$, stąd $x = a - L/2$. Ostatecznie: $x = a/2$ dla $a \leqslant L$, $x = a - L/2$ dla $L < a \leqslant 3L/2$, $x = L$ dla $3L/2 < a \leqslant 2L$.



Rys. 2

557. Ponieważ odległość satelity od detektora jest dużo większa niż h, możemy przyjąć, że wiązka promieniowania wysyłanego przez satelitę jest równoległa. Do odbiornika w punkcie C docierają promienie biegnące bezpośrednio od satelity i odbite od powierzchni jeziora, jak na rysunku 2. Punkty A i B leżą na tej samej powierzchni falowej i mają zgodną fazę. Ich różnica dróg jest równa $\Delta s = |AC| - |BC| = |ED| = 2h\sin\alpha$. Jeden z promieni odbija się od ośrodka, w którym prędkość rozchodzenia się fali jest mniejsza niż w powietrzu. Powoduje to zmianę fazy o π, odpowiadającą przebytej drodze $\lambda/2$. Uwzględniając to, otrzymujemy wzór na maksima interferencyjne:

$$\sin\alpha = \frac{(2k+1)\lambda}{4h}, \qquad \text{gdzie } k = 0,1,2,\ldots \text{ i } k \leqslant \frac{4\frac{h}{\lambda} - 1}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 1395.

Niech tymi niezerowymi współczynnikami będą a, b i c, stojące zaś przy nich jednomiany nazwijmy odpowiednio u, v i w. Załóżmy, że wśród tych jednomianów najwyższy stopień ma w. Istnieje wtedy zmienna, która występuje w w, ale nie występuje w u lub v – bez utraty ogólności możemy przyjąć, że x_1 ma tę własność. Wówczas

$$f(1,1,\ldots,1) = a+b+c,$$

$$f(-1,1,\ldots,1) = \begin{cases} a+b-c, & \text{gdy } x_1 \text{ nie występuje ani w } u, \text{ ani w } v,\\ -a+b-c, & \text{gdy } x_1 \text{ występuje w } u, \text{ ale nie w } v,\\ a-b-c, & \text{gdy } x_1 \text{ występuje w } v, \text{ ale nie w } u. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku mamy $f(1,1,\ldots,1) - f(-1,1,\ldots,1) = 2c$, ale z drugiej strony, skoro $f(\pm1,1,\ldots,1) \in \{-1,1\}$, to $c \in \{-1,1\}$. Z zadania 1394 wiemy, że $a^2+b^2+c^2 = 1$, otrzymujemy więc $a = b = 0$ wbrew założeniu. Pozostałe przypadki wymagają analogicznego rozumowania.

Wielomianem o dokładnie czterech niezerowych współczynnikach spełniającym warunki zadania jest np. $\frac{1}{2}(1 + x_1 + x_2 - x_1x_2)$.