Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

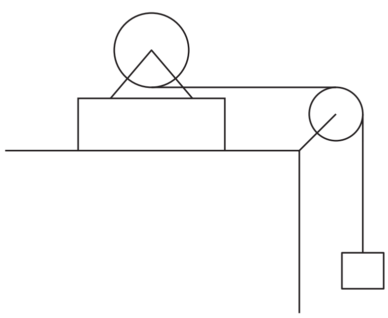
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2013

Zadania z fizyki nr 552, 553

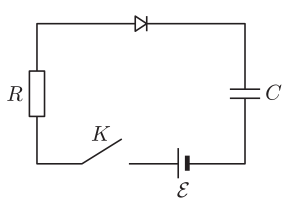
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

552. Do podstawki leżącej na stole przymocowany jest pełny walec o promieniu R, który może swobodnie obracać się wokół własnej osi. Do końca nici nawiniętej na walec i przerzuconej przez nieruchomy bloczek, jak na rysunku 1, przymocowano ciężarek. Masy podstawki, walca i ciężarka są jednakowe. Ile obrotów wykona walec w czasie t? W chwili początkowej układ spoczywa. Tarcie można zaniedbać.

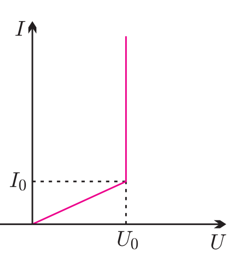


Rys. 1

553. Ile ciepła wydzieli się na oporze R w obwodzie przedstawionym na rysunku 2(a) po zamknięciu klucza? W chwili początkowej kondensator o pojemności C nie jest naładowany. Siła elektromotoryczna źródła prądu wynosi $\mathcal{E}$, opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny. Wyidealizowana charakterystyka prądowo-napięciowa diody przedstawiona jest na rysunku 2(b).



Rys. 2(a)



Rys. 2(b)

Rozwiązania zadań z numeru 10/2012

Przypominamy treść zadań:

544. Cienkościenna, nieprzewodząca sfera o promieniu R i masie M naładowana jest równomiernie ładunkiem Q. W sferze znajdują się dwa niewielkie otwory leżące na tej samej średnicy. Cząstka o masie m i ładunku q jednoimiennym z Q zaczyna zbliżać się do sfery z bardzo dużej odległości wzdłuż prostej przechodzącej przez otwory, z prędkością początkową v. W chwili początkowej sfera spoczywa. Ile czasu cząstka znajdować się będzie wewnątrz sfery? Przyjmij, że efekty magnetyczne są zaniedbywalne.

545. Satelita poruszający się po orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o promieniu r został przyhamowany i zaczął poruszać się po orbicie eliptycznej, stycznej do powierzchni planety. Wyznaczyć czas spadania satelity na planetę. Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety wynosi $\mathbf{g}$.

544. Sposób 1. Jako układ odniesienia możemy wybrać układ inercjalny, w którym sfera w chwili początkowej spoczywa. Siły elektrostatyczne są zachowawcze oraz nie działają żadne siły zewnętrzne, spełnione są więc zasady zachowania energii i pędu:

$$\frac{(mv^2)}{2} = \frac{(Mv_1^2)}{2} + \frac{(mv_2^2)}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R},$$
$$mv = Mv_1 + mv_2,$$

gdzie v_1 i v_2 są odpowiednio prędkościami sfery i cząstki w chwili, gdy cząstka dotrze do pierwszego otworu. Musi być spełniony warunek $v_2 > v_1$. Wiemy z prawa Gaussa, że wewnątrz równomiernie naładowanej sfery nie ma pola elektrycznego, cząstka porusza się więc od jednego do drugiego otworu ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością względną $v_x = v_2 - v_1$. Szukany czas wynosi $t = 2R/v_x$.

Sposób 2. Przyspieszenia $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_1$ odpowiednio cząstki i sfery w dowolnym układzie inercjalnym wynoszą $\vec{a}_2 = \vec{F}/m$ i $\vec{a}_1 = -\vec{F}/M$, gdzie $\vec{F}$ jest siłą, jaką sfera działa na cząstkę wzdłuż wektora położenia względnego obu ciał, a jej wartość zależy od odległości między nimi. Przyspieszenie względne wynosi $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{F}/\mu$, gdzie $\mu = mM/(M+m)$. Jest to równanie ruchu fikcyjnej cząstki o masie μ, zwanej masą zredukowaną układu dwóch ciał, poruszającej się z ich prędkością względną w polu siły $\vec{F}$. Zasada zachowania energii w naszym problemie sprowadzonym do ruchu jednego ciała ma teraz postać

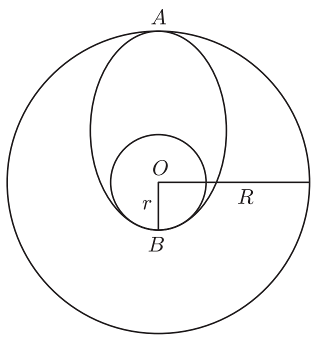
$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_x^2}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Stąd

$$v_x = \sqrt{v^2 - \frac{Qq(M+m)}{2\pi\varepsilon_0 RmM}}.$$

Szukany czas wynosi $t = 2R/v_x$, gdy $v > \sqrt{Qq(M+m)/2\pi\varepsilon_0 RmM}$, dla mniejszych prędkości cząstka nie dotrze do wnętrza sfery.

Warto sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że energia kinetyczna fikcyjnej cząstki o masie zredukowanej równa jest sumie energii kinetycznych sfery i cząstki w układzie ich środka masy.



Rys. 3

545. Przyjmijmy, że zmniejszenie prędkości satelity nastąpiło w punkcie A orbity kołowej przedstawionej na rysunku 3. Ognisko elipsy, po której zaczyna poruszać się satelita, znajduje się w punkcie O w środku planety. Interesuje nas czas, po którym satelita znajdzie się w punkcie B, czyli połowa okresu obiegu po elipsie T_1. Z III prawa Keplera mamy

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a^3}{R^3},$$

gdzie T jest okresem obiegu satelity po orbicie kołowej, natomiast a – półosią wielką elipsy: $a = (R+r)/2$. Okres obiegu po orbicie kołowej wyznaczamy, wiedząc, że siła dośrodkowa jest siłą grawitacji

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{\mathrm{G}Mm}{R^2}$$

oraz $T = 2\pi R/v$ (M i m to masy planety i satelity, v to prędkość satelity). Stąd

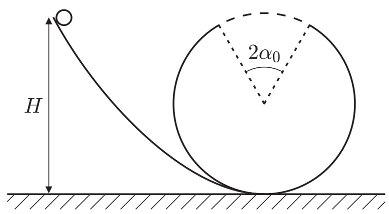
$$T_1^2 = \frac{\pi^2(R+r)^3}{2\mathrm{G}M}.$$

Uwzględniając, że przyspieszenie na powierzchni planety wyraża się wzorem $\mathrm{g} = \mathrm{G}M/r^2$, otrzymujemy szukany czas:

$$t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{2r}\sqrt{\frac{(R+r)^3}{2\mathrm{g}}}.$$

* * *

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F



Rys. 4

Zadania przygotowywane od lutego 2012 r. przez Ewę Czuchry miały nieco bardziej popularny charakter niż pojawiające się w lidze pod kierownictwem Jerzego B. Brojana. Oceniając nadesłane przez uczestników naszej zabawy rozwiązania, niżej podpisany miał zatem przyjemność zapoznawać się z eleganckimi i poprawnymi rozwiązaniami.

Tym większym zaskoczeniem był fakt, że wzięte wprost z podręcznika Hallidaya i Resnicka zadanie **538** ($WT = 1{,}96$) polegające na ocenie wysokości, z jakiej musi staczać się ciało, aby, oderwawszy się na początku wyrwy toru przedstawionego na rysunku 4, nie wypadło poza tę wyrwę, miało tak mało poprawnych rozwiązań. Spośród dziesięciu (!) nadesłanych rozwiązań jedynie prace **A. Idzika** i **T. Wietechy** zawierały kompletną dyskusję obu warunków, jakie ciało to musi spełnić: zasięg rzutu ukośnego ze skraju wyrwy nie może przekraczać jej rozmiaru oraz siła grawitacji nie oderwie ciała od toru przed osiągnięciem brzegu wyrwy. Chociaż niemal wszyscy rozwiązujący zauważyli pierwszy z tych warunków, drugi z nich umknął uwagi większości autorów.

Uwzględnienie obu warunków prowadzi do podwójnej nierówności na poszukiwaną wysokość. Tu niżej podpisany musi uderzyć się w piersi, bowiem opublikowane w numerze 9/2012 rozwiązanie zawiera irytującą literówkę: ostateczny wynik powinien mieć postać

$$\frac{1}{2}\cos\alpha_0 \leqslant \frac{H}{R} - 1 - \cos\alpha_0 \leqslant \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

Krzysztof TURZYŃSKI

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 39,02
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 – 28,34
Tomasz Wietecha (Tarnów)	8 – 27,04
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Jacek Konieczny (Poznań)	23,03
Ryszard Woźniak (Kraków)	20.88
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	10 – 19,79

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2009–2012 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (10), T. Wietecha (8), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana zostają odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni": M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

„jednokrotni": A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.