Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 530 ($WT = 1{,}80$) i 531 ($WT = 3{,}70$) z numeru 1/2012

Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,85
Jacek Piotrowski	Rzeszów	41,56
Michał Koźlik	Gliwice	39,86
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	22,60

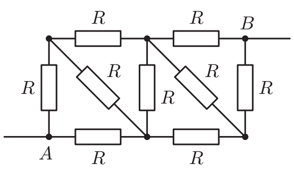
Rozwiązania zadań z numeru 3/2012

Redaguje Ewa CZUCHRY

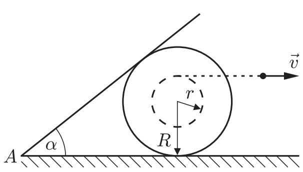
Przypominamy treść zadań:

534. Jaki jest opór między punktami A i B układu pokazanego na rysunku 1?

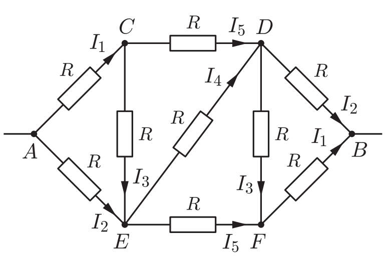
535. Szpulka nici toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Prędkość końca nitki jest skierowana poziomo i ma wartość v_0, wewnętrzny i zewnętrzny promień szpulki to r i R odpowiednio. Na szpulce opiera się deseczka zaczepiona zawiasem w punkcie A (rys. 2). Znaleźć prędkość kątową ω deseczki w zależności od kąta α.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

534. Układ można przerysować tak jak na rysunku 3. Z pierwszego prawa Kirchhoffa w węzłach C i E mamy

$$I_1 = I_3 + I_5, \qquad I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa otrzymujemy

$$(I_3 + I_4)R = I_5R, \qquad (I_1 + I_3)R = I_2R, \qquad (I_1 + I_2 + I_5)R = U.$$

Z powyższych równań wynika, że

$$I_2 = \frac{6}{5}I_1, \qquad I_3 = \frac{1}{5}I_1, \qquad I_4 = \frac{3}{5}I_1, \qquad I_5 = \frac{4}{5}I_1,$$

stąd

$$3RI_1 = U.$$

Zatem

$$R_{AB} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{5}{11}\frac{U}{I_1} = \frac{15}{11}R.$$

535. Przypuśćmy, że w pewnej chwili prędkość kątowa szpulki jest równa ω. Wtedy prędkość liniowa u punktu, w którym deseczka opiera się o szpulkę, jest równa $\omega R \operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Prędkość tego punktu względem deski będzie skierowana wzdłuż deseczki, ponieważ cały czas styka się ona ze szpulką. Stąd:

$$\omega R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = u \sin\alpha.$$

Ruch szpulki odbywa się bez poślizgu, zatem:

$$\frac{v_0}{R} = \frac{u}{r+R}.$$

Ostatecznie

$$\omega = \frac{v_0(r+R)}{R} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{R} = \frac{2v_0(r+R)}{R^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 1355.
Niech $a_n = 3^{2^n}$. Zauważmy, że $a_{n+1} = a_n^2$, więc skoro a_1 daje resztę 2 z dzielenia przez 7, to a_2 daje resztę $2^2 = 4$, a_3 – tę samą resztę co $4^2 = 16$, czyli znowu 2, itd. Podobnie, jeśli $b_n = 5^{2^n}$, to $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ dają odpowiednio reszty $4, 2, 4, 2, \ldots$ z dzielenia przez 7. Zatem nasza liczba $c_n = 2 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 5^{2^n}$ dla n nieparzystego daje tę samą resztę przy dzieleniu przez 7 co $2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16$, czyli 2, a dla n parzystego tę samą resztę co liczba $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$, czyli 0.

Rozwiązanie zadania F 816.
Średnia prędkość atomów wodoru w fotosferze jest równa

$$v = \sqrt{3RT/M} \approx 1{,}2 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Druga prędkość kosmiczna na powierzchni Słońca wynosi

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2GM_\odot/R_\odot} = 6{,}1 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Zatem większość atomów wodoru nie może wyrwać się z zasięgu pola grawitacyjnego Słońca. Część o prędkości znacznie większej od średniej pokonuje siłę ciężkości, tworząc wiatr słoneczny.

Rozwiązanie zadania F 815.
Większa kulka po odbiciu się od podłogi będzie miała prędkość $\sqrt{2gH}$. Mniejsza w układzie związanym z większą kulką będzie miała prędkość $2\sqrt{2gH}$, po zderzeniu się z nią taką samą, ale skierowaną w drugą stronę.
W układzie związanym z ziemią prędkość po zderzeniu będzie więc wynosiła $3\sqrt{2gH}$. Kulka wzniesie się zatem na wysokość $9H$.