Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2012

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 639, 640

Redaguje Marcin E. KUCZMA

639. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta CI przecina bok AB w punkcie D. Prowadzimy przez punkt D dowolną prostą, przecinającą okrąg opisany na trójkącie IAB w punktach P i Q. Wykazać, że prosta CI jest dwusieczną kąta PCQ.

640. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ spełnia warunek

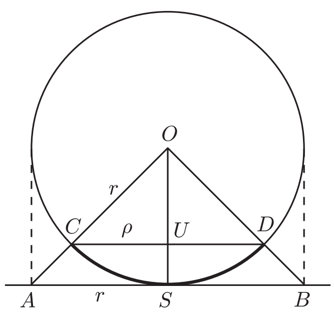
$$\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_na_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3\ldots$$

Dowieść, że spełnia on również liniową zależność rekurencyjną

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3\ldots$$

Wyznaczyć wszystkie pary współczynników (A, B) oraz wszystkie pary wyrazów początkowych (a_1, a_2), dla których ta rekurencja liniowa generuje ciąg (a_n), spełniający zadany na wstępie warunek.

Zadanie 640 zaproponował pan Tomasz Ordowski.



Rozwiązania zadań z numeru 12/2011

Przypominamy treść zadań:

631. Czy istnieje ośmiościan opisany na kuli, której rzut prostokątny na płaszczyznę każdej ze ścian ośmiościanu jest kołem zawartym w tej ścianie?

632. Mamy cztery liczby rzeczywiste; można z nich wybrać parę liczb na sześć sposobów. W każdej parze dodajemy obie liczby; dostajemy układ sześciu liczb. Suma tych sześciu liczb jest znana, równa A; także suma ich kwadratów jest znana, równa B. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjąć suma sześcianów tych sześciu liczb.

631. Przypuśćmy, że istnieje taki ośmiościan, opisany na kuli o środku O i promieniu r. Wybierzmy jedną ze ścian, styczną do owej kuli w punkcie S. Rzut kuli na płaszczyznę tej ściany jest kołem k o środku S i promieniu r (rysunek powyżej przedstawia przekrój płaszczyzną, przechodzącą przez prostą OS; odcinek AB jest średnicą koła k).

Stożek o podstawie k i wierzchołku O wycina na powierzchni kuli (O, r) obszar f – czaszę kulistą, ograniczoną okręgiem, którego średnicą jest (na rysunku) odcinek CD o środku U. Czasze, uzyskane w ten sposób dla ośmiu ścian, są rozłącznymi obszarami na sferze. Suma ich pól nie przekracza pola całej sfery, równego $4\pi r^2$.

Wszelako koło o średnicy CD jest podstawą stożka, z wierzchołkiem w punkcie S, o promieniu podstawy $\rho = |UC| = r/\sqrt{2}$ i wysokości $h = |US| = r - r/\sqrt{2}$. Powierzchnia boczna tego stożka ma pole $\pi\rho\sqrt{\rho^2 + h^2}$, czyli $\pi r^2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Powierzchnia obszaru f jest jeszcze większa. Wychodzi nierówność $8\pi r^2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} < 4\pi r^2$; po przekształceniu: $3 < 2\sqrt{2}$. Sprzeczność; zatem taki ośmiościan nie istnieje.

(Rachunkiem całkowym można obliczyć, że pole obszaru f wynosi $(2 - \sqrt{2})\pi r^2$, co jest większe niż 1/7 pola całej sfery; wielościan o rozważanej własności może mieć więc co najwyżej sześć ścian).

632. Cztery dane liczby to a_1, a_2, a_3, a_4. Nowe sześć liczb – to sumy $a_i + a_j$ $(i < j)$. Przyjmijmy oznaczenia: $\sum a_i = S$, $\sum a_i^2 = T$, $\sum_{i<j} a_ia_j = U$. Wówczas $S^2 = T + 2U$,

$$A = \sum_{i<j}(a_i + a_j) = 3S,$$

$$B = \sum_{i<j}(a_i^2 + 2a_ia_j + a_j^2) = 3T + 2U.$$

Stąd $T = \frac{1}{2}(B - S^2) = \frac{1}{2}B - \frac{1}{18}A^2$.

Niech C będzie sumą sześcianów tych sześciu liczb: $C = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} + C_{\mathrm{III}}$, gdzie

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{I}} &= (a_1 + a_2)^3 + (a_3 + a_4)^3 = \\ &= S \cdot [(a_1 + a_2)^2 - (a_1 + a_2)(a_3 + a_4) + (a_3 + a_4)^2] = \\ &= S \cdot (T - U + 3a_1a_2 + 3a_3a_4); \\ C_{\mathrm{II}} &= S \cdot (T - U + 3a_1a_3 + 3a_2a_4); \\ C_{\mathrm{III}} &= S \cdot (T - U + 3a_1a_4 + 3a_2a_3). \end{aligned}$$

Dodajemy wyrażenia $C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}}$ i otrzymujemy

$$C = 3S \cdot (T - U) + S \cdot (3U) = 3ST = AT = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{18}A^3.$$

Jest to jedyna możliwa wartość sumy C.